

**Министерство образования и науки РФ  
Агентство по образованию РФ  
ФГОУ ВПО «Сибирский федеральный университет»**

**Н.Н. Довженко, И.Н. Довженко**

**КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ  
по дисциплине «Моделирование процессов и объектов  
в обработке металлов давлением»**

**Укрупненная группа:**

150000 Metallургия, машиностроение и материалобработка

**Направление:**

150100.68 Metallургия (магистратура)

**Красноярск 2007**

## **ОГЛАВЛЕНИЕ**

### **1. СИСТЕМНЫЙ ПОДХОД К ПРОЦЕССАМ И ОБЪЕКТАМ ОМД**

1.1. Задачи анализа и синтеза процессов и объектов ОМД, как сложных систем

1.2. Системный подход к анализу и синтезу процессов и объектов ОМД, как сложных систем. Структурные модели

### **2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ОМД, ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ**

#### **И ЭТАПЫ ПОСТРОЕНИЯ**

2.1. Определение и назначение моделирования. Классификация математических моделей

2.2. Системные принципы построения математических моделей

2.3. Этапы построения математических моделей

2.4. Разработка структуры математических моделей функционирования технологических процессов ОМД

### **3. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ В ОМД**

3.1. Предмет и теоретические основы вычислительного эксперимента

3.2. Обработка экспериментальных данных методом наименьших квадратов

### **4. ПРИМЕНЕНИЕ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ АНАЛИЗА ПРОЦЕССОВ И ОБЪЕКТОВ ОМД**

4.1. Проекционные методы решения задач ОМД

4.2. Метод конечных элементов

4.3. Стандартные пакеты прикладных программ для решения задач моделирования процессов и объектов ОМД

### **5. ПОСТАНОВКА И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ**

5.1. Общая постановка задач оптимизации

5.2. Численные методы решения задач одномерной оптимизации

5.3. Методы минимизации функций многих переменных

### **6. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О САПР В ОМД**

6.1. Общие сведения о структуре и возможностях САПР в области прессования

### **СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ**

# 1. СИСТЕМНЫЙ ПОДХОД К ПРОЦЕССАМ И ОБЪЕКТАМ ОМД

## 1.1. Задачи анализа и синтеза процессов и объектов ОМД, как сложных систем

### 1.1.1. Определение понятия «система»

Термин «система» используют в тех случаях, когда хотят охарактеризовать исследуемый или проектируемый объект как нечто целое (единое), сложное, о котором невозможно сразу дать представление, показав его, изобразив графически или описав математическим выражением.

Понятие «система» в переводе с греческого «συστήμα» означает «составленное из частей», «соединение», от «соединяю, составляю». Как показывает анализ [1], в термин система на разных стадиях ее рассмотрения можно вкладывать разные понятия, говорить как бы о существовании системы в разных формах.

В результате обобщения многочисленных определений понятия система предлагается следующее определение [2]: система – это множество взаимосвязанных и взаимодействующих элементов любой природы, объединенных единством цели или общими целенаправленными правилами взаимоотношений.

Под элементом принято понимать предел членения системы с точки зрения аспекта рассмотрения, решения конкретной задачи, поставленной цели.

Раскроем определение «система» применительно к понятию «технологическая система» – совокупность функционально взаимосвязанных средств технологического оснащения, предметов производства и исполнителей для выполнения в регламентированных условиях производства заданных технологических процессов и операций<sup>1</sup>. Различают четыре иерархических уровня технологических систем: технологические системы операций, технологические системы процессов, технологические системы производственных подразделений и технологические системы предприятий.

Подсистема технологической системы – технологическая система, выделяемая по функциональному или структурному признаку из технологической системы более высоко уровня.

Элемент технологической системы – часть технологической системы, условно принимаемая неделимой на данной стадии анализа.

Работоспособное состояние технологической системы – состояние, при котором значения параметров и (или) показателей качества изготавливаемой продукции, производительности, материальных и стоимостных затрат на изготовление продукции соответствуют требованиям, установленным в нормативно-технической и (или) конструкторской и технологической документации.

---

<sup>1</sup> ГОСТ 27.004–85. Системы технологические. Термины и определения.

Технология (технологический процесс) – совокупность методов обработки, изготовления, изменения состояния, свойств, формы сырья, материала или полуфабриката, осуществляемых в процессе производства продукции.

Совершенствование производства продукции, получаемой методами обработки давлением, можно осуществлять двумя путями: 1) улучшение действующих технологических процессов и оборудования; 2) создание (разработка, исследование и проектирование) новых. Проблемы, связанные с методическими различиями понятий – улучшение систем и создание (проектирование) систем подробно рассмотрены в работе [3].

Улучшением систем называют процесс, обеспечивающий работу системы или систем согласно ожиданиям, при этом система уже создана и порядок её работы установлен. Улучшение системы означает выявление причин отклонений от заданных норм работы системы или возможностей по улучшению работы системы, т. е. получение результатов, соответствующих целям проекта.

Процесс улучшения систем характеризуется следующими шагами:

1. Определяется задача и устанавливается система и подсистемы.
2. Путем наблюдения определяются реальные состояния, условия работы или поведение системы.
3. Реальные и ожидаемые условия работы системы сравниваются, чтобы определить степень отклонения.
4. В рамках подсистем строятся гипотезы относительно причин этого отклонения.
5. Из известных фактов методом дедукции делаются выводы, большая проблема разбивается на подпроблемы путем редукции.

Метод улучшения систем основан на аналитическом подходе, т. е. причины отклонений ищут в границах самой системы, исходной посылкой служит тот факт, что, все отклонения вызваны дефектами в элементах системы и их можно объяснить специфическими причинами. Функция, назначение, структура и взаимодействие с другими системами при этом под сомнение не ставится.

Создание и проектирование систем отличается от улучшения систем исходными посылками и используемыми методами [2].

В противоположность методологии изменений по улучшению систем, системный подход является методологией проектирования, основывающейся на следующих положениях:

1. Проблема определяется с учетом взаимосвязи с большими (мега) системами, в которую входит рассматриваемая система и с которыми она связана общностью целей.
2. Цели системы обычно определяются не в рамках подсистем, а их следует рассматривать в связи с более крупными (мега) системами или системой в целом.

3. Существующие проекты следует оценивать величиной вмененных издержек или степенью отклонения системы от оптимального проекта.

4. Оптимальный проект обычно нельзя получить путем внесения небольших изменений в существующие принятые формы, он основывается на планировании, оценке и принятии таких решений, которые предполагают новые и положительные изменения для системы в целом.

Выбор методического подхода – улучшать действующие технологические процессы или/и создавать новые, должен основываться на тех целях, которые стоят в настоящее время или встанут в будущем перед производителями продукции.

Глобальная цель анализа и синтеза состоит в выборе и обеспечении таких условий функционирования технологических процессов (ТП), при которых в заданном интервале времени  $[0, T]$  они находятся в работоспособном состоянии. Показателем достижения цели будет мера степени соответствия реального результата функционирования ТП требуемому.

Условия работоспособности ТП нами приняты [4] в виде отношений

$$Y_i(t) \in \square Y_i^T, \forall t \in [0, T], i = 1, \dots, n, \quad (1.1)$$

где  $Y_i^T$  – область допустимых значений  $i$ -х характеристик качества продукции и выходных параметров, определяющих требования к ТП, заданная следующим образом:

$$Y_i^T = [a_i, b_i], i = 1, \dots, k, \quad (1.1a)$$

$$Y_i^T \geq a_i, i = k+1, \dots, m, \quad (1.1б)$$

$$Y_i^T \leq b_i, i = m+1, \dots, n, \quad (1.1в)$$

где  $a_i$  и  $b_i$  – нижняя и верхняя границы.

С позиций точности функционирования встает задача обеспечения минимального отклонения фактических значений характеристик от требуемых, для чего введем следующий критерий

$$\forall t, |Y(t) - Y^T| = \delta Y(t) \rightarrow \min,$$

а с позиций стабильности (устойчивости)

$$\forall t, \forall Y(t), \delta Y \in \Delta,$$

где  $\Delta$  – поле допуска на отклонения  $\delta Y$ ,  $t \in [0, T]$ .

Сформулируем основные задачи анализа и синтеза процессов и объектов ОМД, как сложных систем [4]:

1. Задачи анализа (прямые задачи), решаемые при условии известной структуры технологической системы (или выбираемой на стадии создания) и наличия математических моделей:

- оценка состояния, когда по заданным значениям входных параметров (управляемых и неуправляемых)  $X_i$  определяются значения внутренних  $Z_j$  и выходных параметров  $Y_i$  в заданный момент времени;

- оценка работоспособности, которая включает анализ влияния возможных производственных и эксплуатационных отклонений входных параметров  $\delta X_i$  от расчетных на разброс внутренних  $Z_j$  и выходных параметров  $\delta Y_i$ ;

- прогнозирование состояния (разброс параметров и постепенные отказы), когда по заданным в начальный момент времени значениям входных параметров  $X_i$  предсказывается момент отказа функционирования  $t$  или интервал времени, в течение которого возможен этот отказ;

- выбор оптимальных номинальных значений входных параметров  $X_i^{opt}$ , обеспечивающих экстремальные значения отдельных выходных параметров  $Y_i^{extr}$  при наложении ограничений на остальные.

2. Задачи параметрического синтеза, процесс выбора параметров технологических систем, обеспечивающих заданные требования к качеству их функционирования:

- поиск заданного состояния технологической системы  $Z_j$  по заданным условиям работоспособности;

- выбор совокупности управляемых (настроечных) параметров, позволяющих эффективно осуществлять подстройку и управление качеством функционирования технологической системы, и оценка допустимых интервалов их вариаций;

- оценка работоспособности при статистическом характере выбранных исходных параметров и возможных трендовых изменениях;

- оптимизация поля допусков на разброс исходных параметров по критерию минимума полей рассеивания выходных параметров;

- оптимизация номинальных значений параметров, которые изменяются во времени, например, износ инструмента.

На рис. 1.1 приведена графическая иллюстрация тех преобразований информации, которые совершаются в процессе анализа и синтеза [2].

Отличие задач анализа от синтеза состоит в том, что в случае анализа при выбранном значении вектора входных параметров вектор выходных параметров может и не находиться в заданной области работоспособности, поэтому основная задача синтеза состоит в поиске вектора входных параметров по заданной области работоспособности (области пространства состояний технологического процесса).

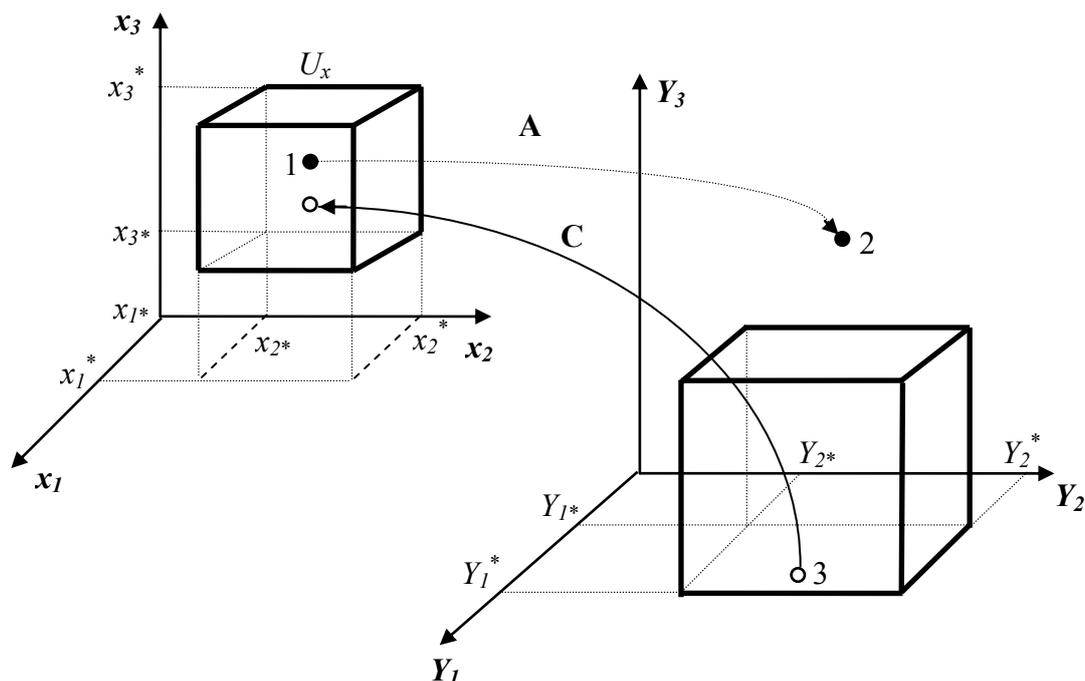


Рис. 1.1. Графическая иллюстрация анализа и синтеза [2]: 1 – точка, отвечающая некоторому допустимому вектору  $X$ ; 2 – точка, отвечающая некоторому вектору  $Y(X)$ ; 3 – точка, удовлетворяющая требованиям по показателям качества; А – анализ; С – синтез

В развитие рассмотренных выше подходов нами в работе [14] сформулированы следующие принципы структурно-параметрического подхода к совершенствованию технологических процессов ОМД: цель совершенствования должна быть подчинена принципам внешнего дополнения и целесообразности, как основным системообразующим факторам; процедуры (процесс) совершенствования, как определенно направленные воздействия, должны осуществляться на стадиях проектирования и функционирования технологического процесса, как системы, подчиняться принципам развития и рационального поведения и обеспечивать, на основании действия принципа отношения зависимости, такие изменения структуры, ритма функционирования и пространства состояния внутренних параметров, которые приведут технологический процесс к такому состоянию или эволюции состояний, при котором будет достигнута глобальная цель и подчиненные ей промежуточные цели, установленные на основании принципа отношения необходимости (или предшествования). Структурная схема применения принципов совершенствования приведена на рис. 1.2.

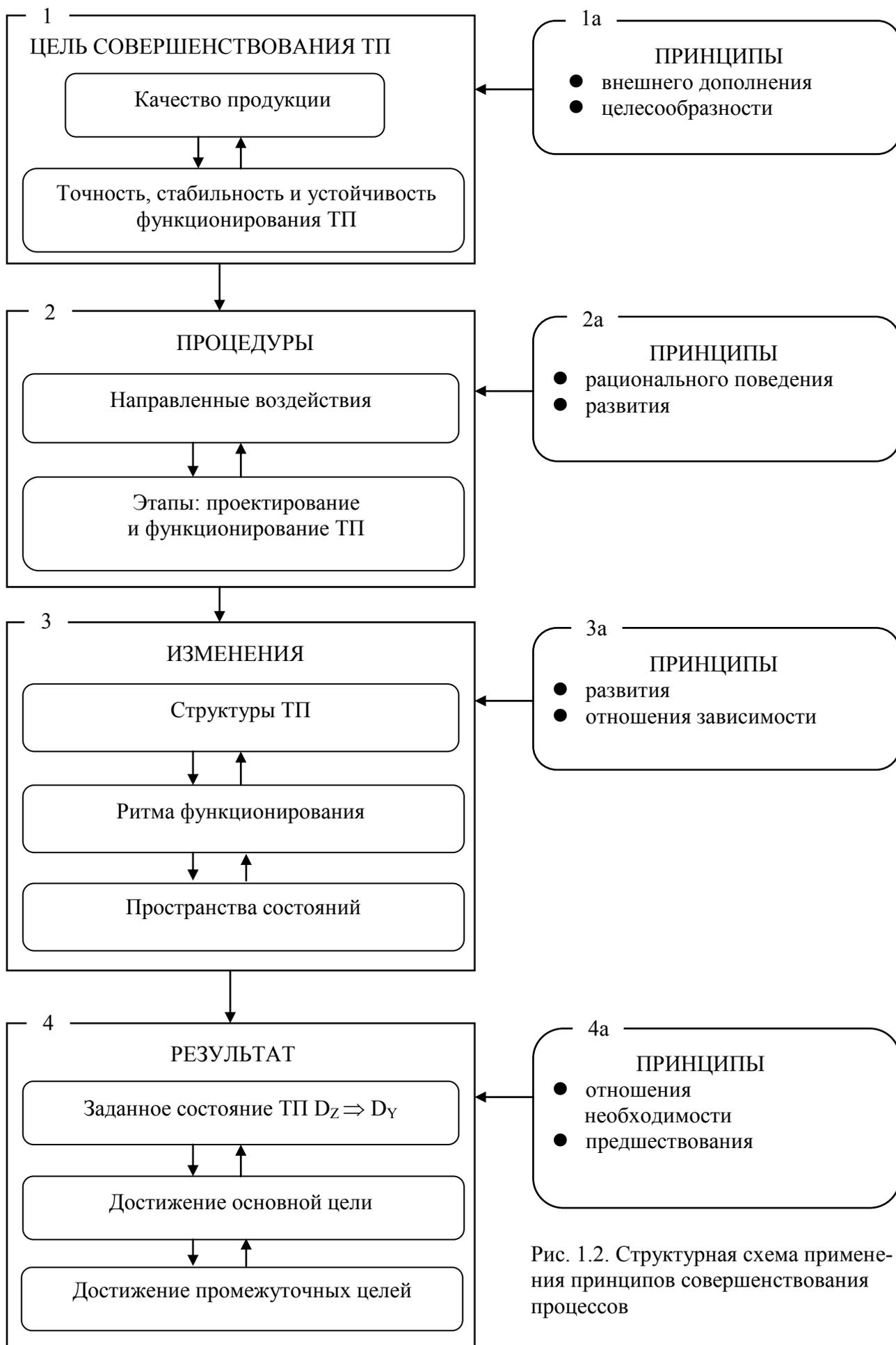


Рис. 1.2. Структурная схема применения принципов совершенствования процессов

## 1.2. Системный подход к анализу и синтезу процессов и объектов ОМД, как сложных систем. Структурные модели

### 1.2.1. Основные понятия и определения

В настоящее время системный анализ стал основным методом не только при исследованиях и разработках автоматизированных систем управления, автоматизированных систем обработки информации, систем искусственного Интеллекта, но и во всех областях науки и техники, экономики и других сферах человеческой деятельности. Проанализируем основные определения системного анализа.

Следует отметить, что фундаментальным понятием системного анализа, теории систем, как это следует из их названия, является понятие «система», которое мы рассмотрели ранее. Раскроем это понятие системы с точки зрения ее свойств.

#### **Первое свойство — целостность.**

Уточним, что рассматривается совокупность взаимосвязанных и взаимодействующих элементов, а не просто набор элементов, имеющих общий признак, объединенных в единое целое и образующих целостность, единство. Элементы, не имеющие связей с другими элементами, просто не входят в рассмотрение.

Отсюда отметим, что в основе функционирования и развития системы лежит понятие целесообразности, целенаправленности.

#### **Второе свойство систем – связи.**

Понятие связь входит в любое определение системы и обеспечивает возникновение и сохранение ее целостных свойств. Связь определяют как ограничение степени свободы элементов. Связи характеризуют направлением, силой и характером (или видом). По первому признаку связи делят на направленные и ненаправленные. По второму – на сильные и слабые. По характеру (виду) различают связи подчинения, связи порождения, равноправные, связи управления.

Рассмотрим понятия, характеризующие функционирование и развитие системы.

**Состояние.** Понятием состояние  $s_i$  обычно характеризуют мгновенную фотографию, «срез» системы, остановку в ее развитии. Его определяют либо через входные воздействия и выходные результаты, либо через макропараметры, макросвойства системы (сила, скорость).

**Поведение.** Если система способна переходить из одного состояния в другое (например,  $s_1 \rightarrow s_2 \rightarrow s_3 \rightarrow \dots s_n$ ), то говорят, что она обладает поведением.

**Равновесие.** Понятие равновесие определяют как способность системы в отсутствие внешних возмущающих воздействий сохранять свое состояние сколь угодно долго.

**Устойчивость.** Под устойчивостью понимают способность системы возвращаться в состояние равновесия после того, как она была из этого состояния выведена под влиянием внешних (или внутренних) возмущающих воздействий.

**Четвертое свойство систем – структура.**

Структура отражает определенные взаимосвязи, взаиморасположение составных частей системы, ее устройство (строение).

Структура системы есть уже не отношение элементов, а отношение их отношений, которые образуют обычно ступенчатую, иерархическую конструкцию. Структура системы представляет собой дальнейшую абстракцию, выделение в чистом виде системного отношения, когда элементы и конкретные отношения между ними временно остаются неспецифицированными. Понятие структуры играет чрезвычайно важную роль в системном анализе. В зависимости от знания структуры классифицируют проблемы.

Знание структуры системы – это знание закона, по которому порождаются элементы системы и отношения между ними (в пространстве, во времени или в любой другой координате). Наблюдатель, определяя структуру системы, как бы пытается восстановить чертежи конструкции изучаемого им конкретного объекта, согласно которым он создан людьми или природой. Правда, один реальный объект может иметь тысячи и миллионы разных структур.

В сложных системах структура включает не все элементы и связи, а лишь наиболее существенные компоненты и связи, которые мало меняются при текущем функционировании системы и обеспечивают существование системы и ее основных свойств. Одна и та же система может быть представлена разными структурами в зависимости от стадии познания объектов или процессов, от аспектов их рассмотрения, цели создания.

**Внешняя среда, границы системы, существенные и несущественные связи.** Вводя понятие система мы ограничиваем количество элементов, входящих в систему. При этом подразумевается, что существует множество элементов за пределами системы, которая функционирует не сама по себе, а во взаимодействии с окружающими ее элементами, составляющими внешнюю среду для данной системы. Под внешней средой понимается все то, что находится вне системы и влияет на функционирование системы либо само находится под ее воздействием. Внешней средой называется некоторое множество элементов, находящихся вне системы и взаимодействующих с системой в целом или отдельными ее элементами. Другими словами: внешняя среда – это множество существующих вне системы элементов любой природы, влияющих на систему или находящихся под ее воздействием в условиях рассматриваемой задачи.

Отсюда вытекает, что надо установить границы системы, т.е. определить, какие элементы считать взаимодействующими в ее рамках, а какие – взаимодействующими как часть внешней среды. Необходимо провести границу как можно четче, так как от этого иногда зависит возможность последующего исследования и проектирования системы.

В любой системе число взаимодействий велико, поэтому необходимо ограничить число учитываемых взаимосвязей. Они делятся на существенные и несущественные (маловажные), практически не влияющие на функционирование системы и на точность получаемых решений, потому их не следует учитывать. Существенные связи нельзя исключать из рассмотрения (рис. 1.3). Общее правило, которым следует пользоваться при определении множества элементов, образующих систему, заключается в следующем: нельзя объединять несовместимое и пытаться разделить неделимое.

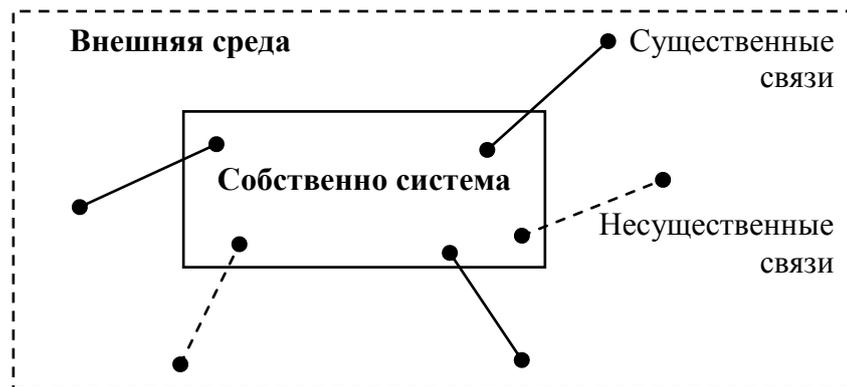


Рис. 1.3. Связи системы

Классификацию систем можно осуществить по разным критериям. Проводить ее жестко – невозможно, она зависит от цели и ресурсов. Приведем основные способы классификации (возможны и другие критерии классификации систем) [6].

1. По отношению системы к окружающей среде:
  - открытые (есть обмен ресурсами с окружающей средой);
  - закрытые (нет обмена ресурсами с окружающей средой).
2. По происхождению системы (элементов, связей, подсистем):
  - искусственные (орудия, механизмы, машины, автоматы, роботы и т.д.);
  - естественные (живые, неживые, экологические, социальные и т.д.);
  - виртуальные (воображаемые и, хотя реально не существующие, но функционирующие так же, как и в случае, если бы они существовали);
  - смешанные (экономические, биотехнические, организационные и т.д.).
3. По описанию переменных системы:
  - с качественными переменными (имеющие лишь содержательное описание);
  - с количественными переменными (имеющие дискретно или непрерывно описываемые количественным образом переменные);
  - смешанного (количественно-качественное) описания.
4. По типу описания закона (законов) функционирования системы:

- типа "черный ящик" (неизвестен полностью закон функционирования системы; известны только входные и выходные сообщения);
  - не параметризованные (закон не описан; описываем с помощью хотя бы неизвестных параметров; известны лишь некоторые априорные свойства закона);
  - параметризованные (закон известен с точностью до параметров и его возможно отнести к некоторому классу зависимостей);
  - типа "белый (прозрачный) ящик" (полностью известен закон).
5. По способу управления системой (в системе):
- управляемые извне системы (без обратной связи, регулируемые, управляемые структурно, информационно или функционально);
  - управляемые изнутри (самоуправляемые или саморегулируемые - программно управляемые, регулируемые автоматически, адаптируемые - приспособляемые с помощью управляемых изменений состояний, и самоорганизующиеся - изменяющие во времени и в пространстве свою структуру наиболее оптимально, упорядочивающие свою структуру под воздействием внутренних и внешних факторов);
  - с комбинированным управлением (автоматические, полуавтоматические, автоматизированные, организационные).

### **1.2.2. Этапы системного анализа и их детализация**

Под системным анализом понимается представление и описание объектов и процессов окружающего мира в специальном виде – в виде систем с последующим анализом, методы которого основаны на свойстве принципиальной членимости системы на элементы.

Исследование в системном анализе разбивается на ряд этапов, схематически представленных на рис. 1.4.

При системном анализе объектов, процессов, явлений необходимо пройти (в указанном порядке) следующие этапы системного анализа:

1. Обнаружение проблемы (задачи).
2. Оценка актуальности проблемы.
3. Формулировка целей, их приоритетов и проблем исследования.
4. Определение и уточнение ресурсов исследования.
5. Выделение системы (из окружающей среды) с помощью ресурсов.
6. Описание подсистем (вскрытие их структуры), их целостности (связей), элементов (вскрытие структуры системы), анализ взаимосвязей подсистем.
7. Построение (описание, формализация) структуры системы.
8. Установление (описание, формализация) функций системы и ее подсистем.
9. Согласование целей системы с целями подсистем.

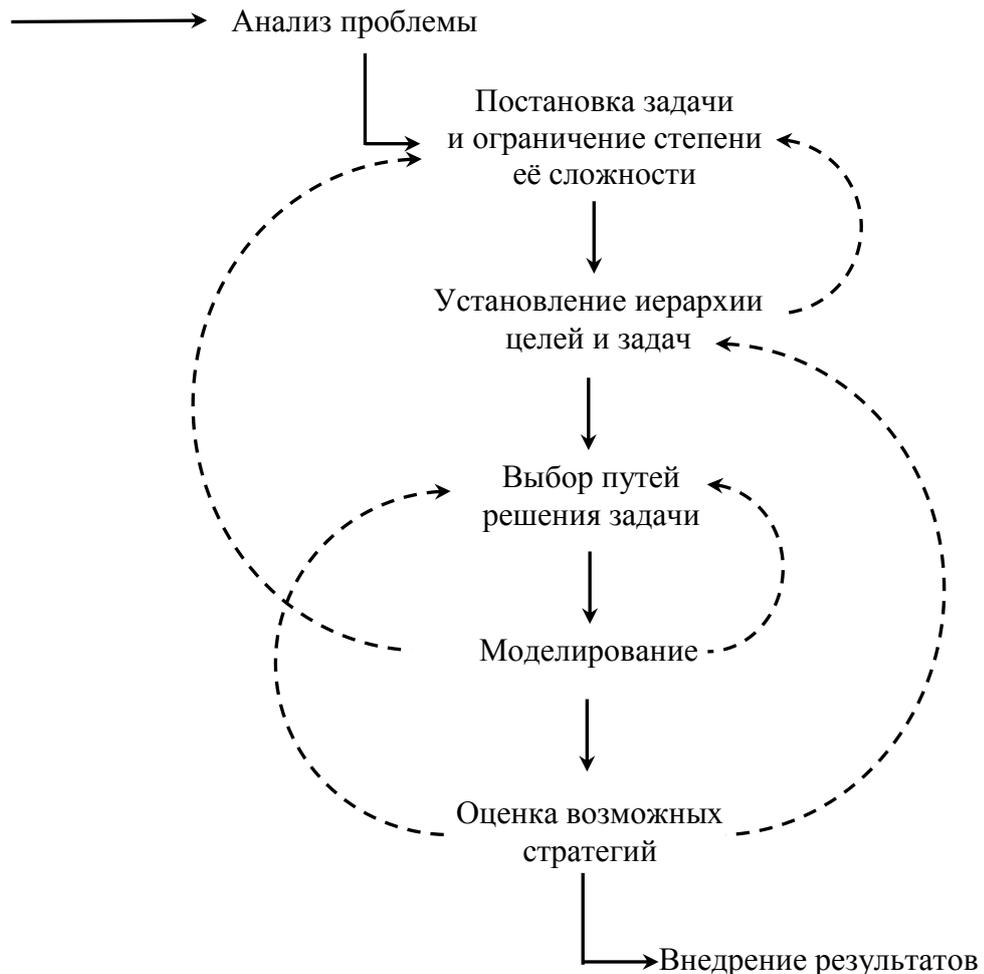


Рис. 1.4. Этапы системного анализа и их взаимосвязь

10. Анализ (испытание) целостности системы.
  11. Анализ и оценка эмерджентности системы.
  12. Испытание, верификация системы (системной модели), ее функционирования.
  13. Анализ обратных связей в результате испытаний системы.
  14. Уточнение, корректировка результатов предыдущих пунктов.
- Рассмотрим этапы системного анализа подробнее.

Анализ проблемы включает в себя: вопрос о существовании проблемы, что имеет первостепенное значение (приложение огромных усилий к решению несуществующей проблемы – отнюдь не исключение); точное формулирование проблемы (это – первые и необходимые этапы любого системного исследования, как известно, успешное формулирование проблемы может быть равносильно половине решения проблемы); анализ логической структуры проблемы; развитие проблемы (в прошлом и будущем); внешние связи проблемы с другими проблемами; принципиальная разрешимость проблемы.

Постановка задачи требует определения системы: спецификацию задачи (чтобы построить систему, проблему надо разложить на комплекс четко сформулированных задач; в случае сложной системы задачи образуют иерархию, т.е. для одного объекта будут решаться совершенно различные задачи); определение

позиции наблюдателя, так как она, в принципе, определяет критерий решения проблемы; определение объекта – только на первый взгляд легкая задача, в некоторых случаях она составляет наибольшую трудность исследования; выделение элементов – декомпозиция системы (определение границ разбиения системы); определение подсистем; определение среды.

Анализ структуры системы предлагает определение уровней системы (в сложных системах), спецификации подсистем, спецификации процессов (функций) текущей деятельности (рутинных) и развития (целевых).

Опыт исследования эффективности технических систем показывает целесообразность введения четырех качественно различных методологических уровней анализа систем. На рис. 1.5 приведена схема методологических уровней анализа систем:

- I уровень – «состав–свойства» (или элементарный уровень);
- II уровень – «структура–функции» (или агрегативный уровень);
- III уровень – «организация–поведение» (или системный уровень);
- IV уровень – «метасистема–деятельность».

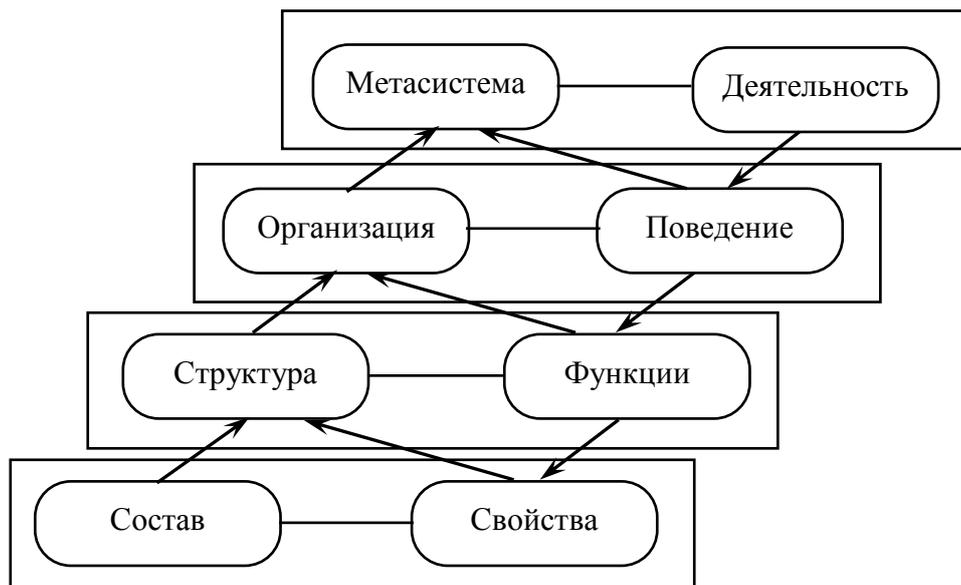


Рис. 1.5. Схема методологических уровней анализа систем

Первый методологический уровень охватывает приемы и методы исследования элементов системы. Методология исследования на этом уровне основательно развита в механике сплошных сред.

На этом уровне понятие эффективности системы ещё не вводится, поскольку система в целом и целенаправленный процесс её функционирования не рассматривается.

Объектом исследований на уровне «структура–функция» являются ограниченные по своим масштабам и разнообразию функций системы (подсистемы), эффективность которых может быть достаточно адекватно отражена скалярным (обобщенным) показателем.

На методологическом уровне «организация–поведение» исследуются взаимодействие между несколькими ТС, эффективность которых проявляется как многомерное свойство через векторный показатель.

На уровне «метасистема–деятельность» исследуются глобальные системы (метасистемы), включающие в свой состав организации вместе с их внешней средой. Анализ метасистемы возможен и её деятельности возможен только на вербальном (описательном) уровне.

Системный подход определяет исследования на третьем и четвертом методологических уровнях, поскольку система представляет собой некую целостность, состоящую из элементов и наделенную определенной структурой, а цели направлены на деятельность метасистемы.

Рассмотрим структурное представление системы волочильного стана для производства проволоки [9], приведенное на рис. 1.6 и 1.7.

Система волочильного стана в качестве подсистем содержит главный привод, протягиваемое изделие и станину (рис. 1.5). Подсистемы взаимодействуют с собой через концевые элементы. Одним из входов системы волочильного стана служит выход взаимодействующей с ним системы очага деформации (рис. 1.6), определяющего нагрузки в приводе стана. В свою очередь система волочильного стана влияет на входы и выходы очага деформации и среди них на показатели качества изделий и технико-экономические данные процесса

Рассмотрим особенности системного анализа процессов и объектов в обработке металлов давлением [5]. Нами разработана общая схема выполнения анализа и синтеза технологических процессов в рамках структурно-параметрического подхода (рис. 1.8).

Технологические процессы обработки металлов давлением, как и любые технические системы, характеризуются структурой, определяющей взаимоотношенную совокупность связей и отношений между её отдельными объектами, каждый из которых выполняет определённые функции. Согласованное структурой взаимодействие всех объектов образует целостный процесс – процесс функционирования ТП. Функционирование направлено на достижение конкретной конечной цели на заданном интервале времени  $[0, T]$ . Успешность (эффективность) достижения этой цели в наибольшей степени зависит от правильности решения двух основных задач: структурной организации ТП и выбора оптимальных режимов функционирования.



Рис. 1.6. Структура системы волочильного стана и системные объекты



Рис. 1.7. Структура системы очага деформации и системные объекты

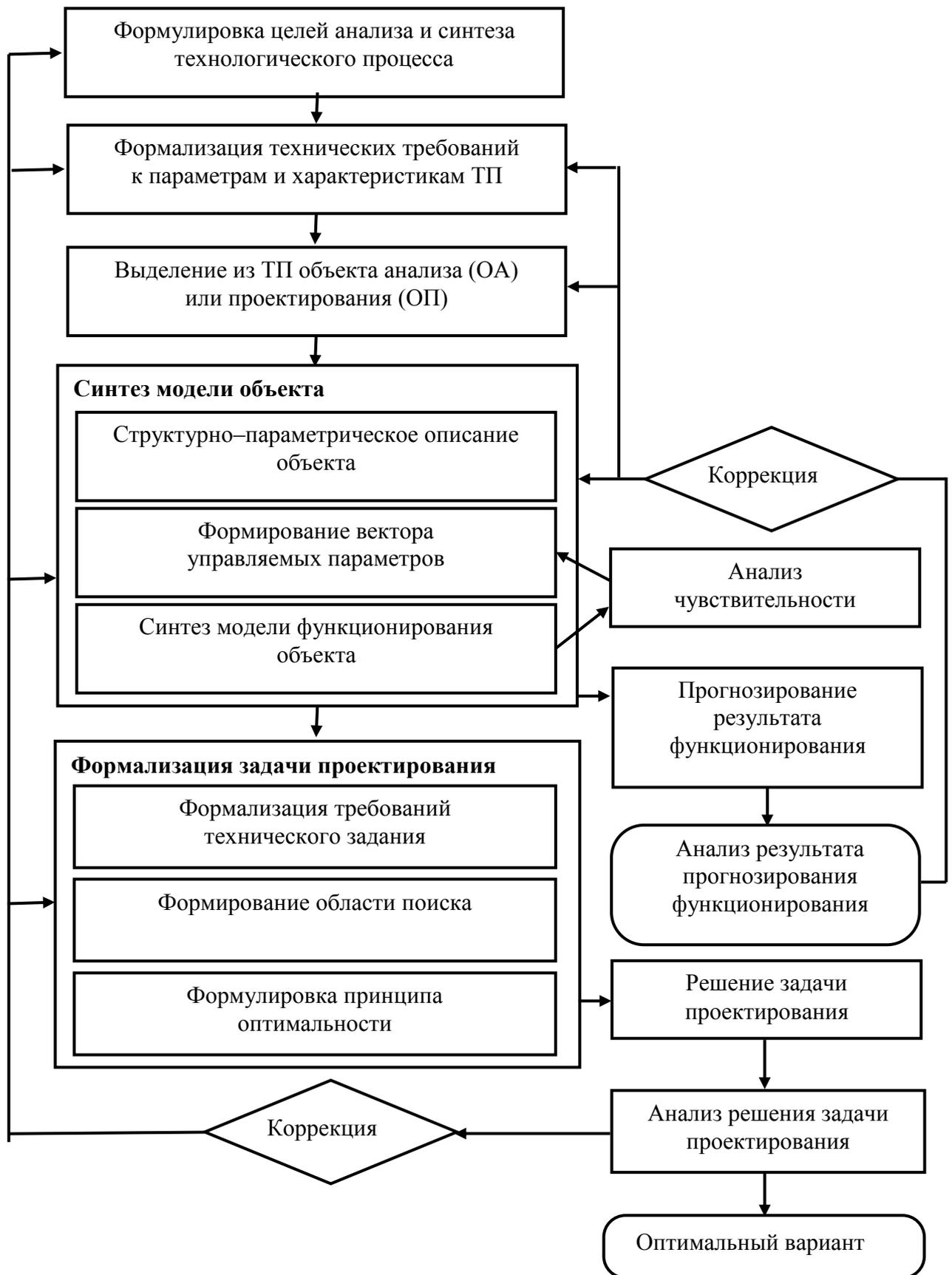


Рис. 1.8. Схема анализа и синтеза технологических процессов в рамках структурно-параметрического подхода

Технологический процесс представляет собой последовательность во времени реальных воздействий на заготовку (обрабатываемый материал), причем такая последовательность не является абсолютно произвольной: воздействия объективно организованы. Эта организация, порядок и есть порождением того, что является содержанием понятия “система”. Конкретная организация воздействий вносит ограничение на их возможные последовательности. Основой этих последовательностей служит причинно–следственная связь, удовлетворяющая принципам детерминизма и причинности: ни одно реальное явление не возникает спонтанно, самопроизвольно, всегда имеется предшествующее ему во времени другое реальное явление, которое его вызывает, причём, одно явление (причина) при вполне определённых условиях с необходимостью порождает, производит другое явление (следствие); ни одно явление, реализовавшееся в данный момент времени, не зависит от того, какие реальные явления произойдут в моменты времени, следующие за указанным (в математической теории систем это свойство называют причинностью); в данный момент времени реализуется определённое явление, а не какое–то другое, что указывает на наличие определенного основания для реализации именно этого явления (принцип детерминизма реальных процессов).

Причинно-следственные отношения в ТП, в зависимости от способа проявления причинной связи, необходимо подразделять на динамические (однозначные) и статистические (вероятностные). При этом важно выделить причины общие, специальные и главные, а также число вступающих в причинную связь явлений: простые, составные, однофакторные, многофакторные, системные, несистемные и др.

Установление причинно–следственных отношений является необходимым, но не достаточным условием создания теории и моделей функционирования ТП. С точки зрения принципа системности, соотношение между объектами системы характеризуется таким взаимодействием, которое предполагает одновременность их существования. В этом – принципиальное отличие системных отношений от генетической причинности, где обязательно предполагаются отношения временного следования. Основным видом системных отношений является корреляция, то есть связь соответствия. Ни один объект системы не может измениться без того, чтобы то или иное изменение не претерпела бы и вся система. При этом структура системы опирается на коррелятивные связи.

Наиболее стабильным моментом функционирующей во времени системы является её структура, однако и она не абсолютно неизменна. Структура не появляется спонтанно, но является результатом определённых изменений, развития. В этом смысле генезис структуры подчиняется принципу причинности, а существование и функционирование структур подчиняется принципу системности. Так, процесс ОМД подчиняется причинному принципу создания структуры (выбор заготовки и способа её формоизменения,

форма инструмента и тип оборудования), но как только процесс начинает осуществляться (т.е. система начинает функционировать), то его поведение уже подчиняется не причинным, а коррелятивным законам. Системная корреляция в этих условиях выступает как один из видов детерминации, то есть взаимообусловленности, явлений.

Таким образом, причинный (необходимые условия) и системный (достаточные условия) подходы дополняют друг друга и в своей совокупности дают глубокую картину всеобщей связи явлений и процесса их развития. Корреляция не порождает новое явление, но определённым образом обуславливает как состояние системы, так и её функциональную эволюцию.

При математической формализации этих положений понятие причинности отражается в понятиях структуры и входа, понятие системности – в понятие состояния ТП и закон изменения этого состояния, а понятие процесс–следствие – в понятие выхода.

Реальная система всегда включает два процесса, один из которых (выход: процесс–следствие) является отображением другого (вход: причинный процесс). Однако при формальном анализе характера этого отображения обнаруживается, что непосредственной связи между ними нет. Действительно, реальное событие в момент времени  $t$  не может зависеть от того, что в этот момент реально не существует. События, которые произошли в процессе–входе в моменты  $\tau$ , предшествующие моменту  $t$ , в момент  $t$  не являются реальностью. Поэтому событие, представляющее собой конкретное значение выхода в момент  $t$ , не зависит от значений входа в моменты  $\tau < t$ . Вместе с тем выход в момент  $t$  также не зависит от входа, реализующегося в тот же самый момент  $t$ , поскольку влияние одного явления на другое не может быть мгновенным, распространение воздействия всегда происходит с конечной скоростью, причина и следствие не могут возникнуть одновременно. Возникает противоречие: с одной стороны, выход зависит от входа, а с другой – не зависит. Разрешение противоречия состоит в том, что зависимость выхода от входа является опосредованной. Это с необходимостью влечёт применение принципа системности, приводящего к признанию наличия коррелятивных связей между входом–причиной до момента  $t$ , обуславливающих состояние системы  $Z(t)$  и выходом в этот момент. Таким образом, конкретной причиной явления в процессе–выходе, основанием реализации именно этого явления, является некоторое состояние (детерминизм).

Из представленного подхода вытекает важная для анализа технологических процессов ОМД аксиома: в каждый момент времени  $t$  система характеризуется некоторым состоянием – элементом множества её состояний, которое однозначно определяют значение выхода в этот момент  $t$ .

Помимо входа, состояния и выхода необходимо ввести ещё два понятия, вытекающих из принципа системности:

– отображения выхода: вид отображения, которое каждому состоянию ставит в соответствие определённое значение выхода;

– переходное отображение: вид отображения, которое каждому состоянию и каждому входу ставит в соответствие определённое состояние, причём это отображение зависит от двух моментов времени, как от параметров.

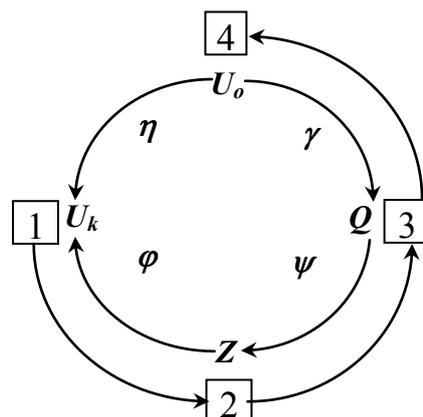
Процессы деформации, нагрева и охлаждения металла отнесем к процессам с распределенными параметрами, что объясняется распределением по объему деформируемого металла и инструмента их физико-механических свойств, а также возникающих при деформации напряжений и температур.

Для систем с распределенными параметрами характерно:

- распределенное во времени и пространстве воздействие на объект;
- состояние объекта зависит от одного или нескольких параметров, распределенных в пространстве.

Для выработка подхода к моделированию функционирования ТП формализуем некоторые объекты, связанные с процессом–входом, процессом–выходом и процессом в пространстве состояний. Особенностью ТП обработки металлов давлением является то, что процессы входа и выхода связаны с одним объектом – обрабатываемой заготовкой, которая из исходного состояния  $u_0(t_0)$  в процессе деформации преобразуется в состояние  $u_n(t_n)$  путём перевода технического объекта (инструмента и оборудования) из начального состояния  $z_0(t_0)$  в заданное  $z_i(t_i)$ . Примем, что обрабатываемая заготовка, имеющая состояние  $u_0(t_0, x^\alpha)$  на процессе–входе, вызовет вектор основной распределенной/сосредоточенной технологической случайной нагрузки  $Q(t, x^\alpha) = \{q_{ij}(t, x^\alpha), i=1, \dots, N; j=1, \dots, l_i\}$  ( $N$  – число подсистем технического объекта, содержащих рабочие органы;  $l_i$  – число компонент в  $q_{ij}$ -м векторе;  $x^\alpha$  – пространственные координаты,  $\alpha = x, y, z$ ) на инструмент, который в свою очередь, создаст вектор всех остальных нагрузок на элементы инструментальной наладки и оборудование, необходимых для выполнения технологической операции  $G(t) = \{g_{ij}(t), i=1, \dots, N; j=1, \dots, m_i\}$ , и обусловит вектор необходимых управляющих воздействий  $V(t) = \{v_{ij}(t), i=1, \dots, N; j=1, \dots, n_i\}$ .

Основываясь на изложенных представлениях, приступим к построению формальной модели функционирования ТП, для чего установим категорию множеств, заданную: объектами – множествами входных воздействий  $U_0$ , выходов  $U_1$  и состояний  $Z$ ; морфизмами – отображениями  $\gamma, \psi, \varphi, \eta$  указанных множеств. Для принятых объектов и морфизмов введём структурную модель ТП в виде коммутативной диаграммы:



(1.2)

Морфизмом объекта  $\gamma: U_0 \rightarrow Q$  в объект  $\psi: Q \rightarrow Z$  и далее в объект  $\varphi: Z \rightarrow U_1$  будет отображение  $\eta: U_0 \rightarrow U_1$ . Последнее означает, что  $\varphi \bullet \psi \bullet \gamma = \eta$ . Коммутативность диаграммы, составленной из объектов и морфизмов некоторой категории, означает, что для любого пути из одной точки диаграммы в другую, по стрелкам этой диаграммы, произведение соответствующих морфизмов зависит от начального и конечного объектов, а не от выбора пути. В нашем случае есть два пути из  $U_0$  в  $U_1$ , что и даёт условие  $\varphi \bullet \psi \bullet \gamma = \eta$ .

Из коммутативной диаграммы (1.2) следует, что можно построить две структурно различные модели:

$$U_1 = \eta(U_0), \quad (1.3)$$

$$U_1 = \varphi\{\psi[\gamma(U_0)]\}. \quad (1.4)$$

Модели вида (1.3) достаточно широко применяются в теории ОМД, например, для расчёта изменения механических свойств металлов при заданных условиях деформации: степень и скорость деформации, температура.

В основном эти модели имеют структуру  $y = a_0 + \sum a_i x_i^b$  или  $y = a \Pi x^d$ . Необходимо отметить, что в качестве аргументов в этих формулах используются проектные параметры процессов ОМД или их производные, т.е. параметры, значение которых выбирается при проектировании: степень деформации, скорость деформирования и температура. К проектным параметрам в дальнейшем будем относить: форму, размеры инструмента и качество его рабочих поверхностей, размеры заготовки, тип смазки, исходные температуры, тип агрегата и параметры его жесткости. Далее будем обозначать их через множество  $X$ . Параметрами состояния будут – силы (сосредоточенные параметры), поля напряжений, деформаций, скоростей деформации и температур (распределенные параметры), отклонения проектных параметров от их номинальных значений, поврежденность, структура и свойства металла.

По моделям (1.3) достаточно просто можно определить, в основном, интегральное (например, изменение площади поперечного сечения изделия, механические характеристики изделия по сечению и т. п.), значение параметра на выходе ТП, а так же оценить его отклонения от заданных значений при возможных отклонениях проектных параметров, причём, последние могут быть заданы как субъективно, так и на основании наблюдений за реальной системой или получены экспериментально. Оценку отклонений можно выполнить путём разложения функции в ряд Тейлора.

Вместе с тем, моделям (1.3) присуща неполнота отображения реальных процессов, происходящих при функционировании ТП. Особенно это проявляется при прогнозировании точности геометрических размеров элементов изделий и их отклонений. В этом случае задача разрешима только при учёте в модели параметров состояния ТП. Повышение полноты отображения процесса функционирования за счет учета причин отклонений и коррелятивных связей объектов ТП позволяет прогнозировать процесс, а значит управ-

лять им и оптимизировать. Причем, применив обратные морфизмы  $\varphi^{-1}$ ,  $\psi^{-1}$  и  $\gamma^{-1}$  можно по заданным условиям работоспособности ТП установить допустимые интервалы отклонений состояний ТП и входов от их номинальных значений. Следовательно, разработка и применение модели (1.4) более предпочтительно, чем модели (1.3).

Построим для (1.4) формальную, заданную множествами и отношениями, математическую модель функционирования ТП прессования и волочения на основе приведённых рассуждений и с привлечением некоторых понятий динамической системы по Р.Е. Калману. Технологический процесс как система определится заданием следующих множеств и отображений:

I. Множества:  $T$  – моментов времени;  $U$  – состояний обрабатываемой заготовки  $u(\cdot)$  (начальное состояние и в процессе обработки), характеризующихся распределенными параметрами, и  $Z$  – состояний технического объекта  $z(\cdot)$  (начальное состояние и в процессе работы), характеризующихся как распределенными, так и сосредоточенными параметрами, причем, во множество  $Z$  включено множество проектных параметров  $X \subseteq Z$ ;  $Q$  – значений основной распределенной/сосредоточенной технологической нагрузки  $q(\cdot)$ ,  $\gamma: T \times U \rightarrow Q$ ;  $Q^T$  – допустимых значений технологической нагрузки  $q: T \rightarrow Q \subset Q^T$  содержащее множество  $V$  – управляющих воздействий  $v(\cdot) \subseteq Q^T$ ;  $Y$  – мгновенных значений выходов  $y(\cdot)$ , причём состояние продукта обработки на выходе системы  $U \subseteq Y$ ;  $Y^T$  – допустимых значений выходов  $y^T: T \rightarrow Y^T$ .

При этом:

1)  $T$  есть упорядоченное подмножество множества вещественных чисел.

2)  $Q^T$  удовлетворяет следующим условиям:

1<sup>0</sup> Нетривиальность.  $Q^T \neq \emptyset$ , т.е. система не изолирована от других систем.

2<sup>0</sup> Сочленение входных воздействий. Пусть  $q(t', t'']$  – сужение  $q \in Q^T$  на  $(t', t''] \cap T$ . Тогда если  $q, q' \in Q^T$  и  $t_1 < t_2 < t_3$ , то найдётся такое  $q'' \in Q^T$ , что  $q''(t_1, t_2] = q(t_1, t_2]$ ,  $q''(t_2, t_3] = q'(t_2, t_3]$ .

II. Переходные функции

$$\gamma(q; \cdot): T \times T \times Q \times U \rightarrow Q, \quad (1.5)$$

$$\psi(z, x; \gamma(q; \cdot), \cdot): T \times T \times Z \times Q \times Q^T \rightarrow Z, \quad (1.6)$$

значениями которых служат состояния  $q(t) = \gamma(q; t; t_0, q_0, u_0) \in Q$  и  $z(t) = \psi(z; x; t; t_0, z_0, v(\cdot), q(\cdot)) \in Z$ , в которых оказывается система в момент времени  $t \in T$ , если в начальный момент  $t_0 \in T$  она была в начальном состоянии  $z(t_0) = z_0 \in Z$  и если на неё действовало входное воздействие  $q \in Q^T$ . Здесь  $x \in X$  – вектор проектных параметров системы, определяющих её переходную функцию.

Функции  $\gamma$  и  $\psi$  обладают следующими свойствами:

1<sup>0</sup> Направление времени. Функции определены для всех  $t \geq t_0$ .

2<sup>0</sup> Аксиома согласованности. Для любых  $t \in T$ ,  $z \in Z$ ,  $u(\cdot) \in U(\cdot)$  и  $q(\cdot) \in Q(\cdot)$  выполняются равенства

$$\gamma(t; t, q(\cdot), u(\cdot)) = q \text{ и } \psi(x; t; t, z, q(\cdot)) = z.$$

3<sup>0</sup> Аксиома детерминизма. Для любых  $t_1 < t_2 < t_3$ ,  $z \in Z$ ,  $q \in Q^T$  выполняется равенство

$$\psi(x; t_3; t_1, z, q(\cdot)) = \psi(x; t_3; t_2, \psi(x; t_2; t_1, z, q(\cdot)), q(\cdot)).$$

4<sup>0</sup> Аксиома причинности. Если  $q, q' \in Q^T$  и  $q(t_0, t] = q'(t_0, t]$ , то

$$\psi(x; t; t_0, z, q(\cdot)) = \psi(x; t; t_0, z, q'(\cdot)).$$

III. Выходное отображение  $\varphi(x; \cdot): T \times Z \rightarrow Y$ , определяющее выходные величины  $y(t) = \varphi(x, t, z(t))$  и, как переходная функция, зависящее от значений проектных параметров  $x$ .

Введем следующее определение: технологический процесс определен, если заданы упорядоченное множество  $T$ , множества значений входных  $U_0$  и выходных  $U \subseteq Y$  состояний обрабатываемой заготовки и состояний технических объектов  $Z$  – инструмента и оборудования, множества входов  $q(\cdot)$  и выходов  $y(\cdot)$ , переходные отображения  $\gamma$  и  $\psi$ , удовлетворяющее аксиомам согласованности, детерминизма и причинности, и отображение выхода  $\varphi$  такие, что для любого  $y(\cdot) \in Y(\cdot)$  существуют  $z(\cdot): T \rightarrow Z$  и  $u(\cdot) \in U(\cdot)$ , для которых при любых  $\tau, t \in T$ , где  $\tau \leq t$ , выполняется соотношение

$$y(t) = \varphi(t, \psi(t; \tau, z(\tau), \gamma(t; \tau, q(\tau), u(\cdot))))), \quad (1.7)$$

и, наоборот, любой процесс  $y(t)$ ,  $t \geq \tau$ , получаемый согласно (1.7), принадлежит  $Y(\cdot)$ .

Из (1.7) вытекает важный вывод, что даже при одних и тех же значениях  $u(\cdot)$  на  $[\tau, t]$  выходы могут быть разными, кроме того, возмущения на входе играют существенную роль при формировании состояний ТП и выходов, следствием чего будет утверждение: обрабатываемая заготовка – активный технологический фактор, оказывающий влияние на состояние ТП. Несмотря, на первый взгляд, кажущуюся тривиальность этого утверждения, оно требует применения новых подходов к разработке ТП. Традиционно при разработке и оптимизации ТП обрабатываемые заготовки рассматриваются как нечто неизменное и под них “подстраивают” технологию, оптимизируя её за счет инструмента, среды и оборудования. Однако активное влияние обрабатываемого продукта может быть более существенным, чем других факторов.

Таким образом, технологический процесс определим как категорию отношений  $\{\gamma, \psi, \varphi\}$  и состояния  $Z$ , которые является выражением закона его поведения.

При разработке моделей процессов ОМД традиционным является определение системы путём задания соотношений, описывающих отображения  $\gamma$  и  $\psi$ . Однако такое описание является менее общим и недостаточно для моделирования пространства качества функционирования ТП в рамках задач (1.1).

## **2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ В ОМД. ОБЩИЕ ПРИНЦИПЫ И ЭТАПЫ ПОСТРОЕНИЯ**

### **2.1. Определение и назначение моделирования. Классификация математических моделей**

Модель и моделирование - универсальные понятия, атрибуты одного из наиболее мощных методов познания в любой профессиональной области, познания системы, процесса, явления.

Целью моделирования являются получение, обработка, представление и использование информации об объектах, которые взаимодействуют между собой и внешней средой; а модель здесь выступает как средство познания свойств и закономерности поведения объекта.

По уровню, "глубине" моделирования модели бывают:

- эмпирические - на основе эмпирических фактов, зависимостей;
- теоретические - на основе математических описаний;
- смешанные, полуэмпирические - на основе эмпирических зависимостей и математических описаний.

Проблема моделирования состоит из трех задач [6]:

- построение модели (эта задача менее формализуема и конструктивна, в том смысле, что нет алгоритма для построения моделей);
- исследование модели (эта задача более формализуема, имеются методы исследования различных классов моделей);
- использование модели (конструктивная и конкретизируемая задача).

Построение модели – системная задача, требующая анализа и синтеза исходных данных, гипотез, теорий, знаний специалистов. Системный подход позволяет не только построить модель реальной системы, но и использовать эту модель для оценки (например, эффективности управления, функционирования) системы.

Слово "модель" происходит от латинского *modus* (копия, образ, очертание). Моделирование – это замещение некоторого объекта А другим объектом Б. Замещаемый объект А называется оригиналом или объектом моделирования, а замещающий Б – моделью. Другими словами, модель – это объ-

ект-заменитель объекта-оригинала, обеспечивающий изучение некоторых свойств оригинала.

Под математической моделью будем понимать любой оператор  $L$ , позволяющий по соответствующим значениям входных параметров  $X$  установить выходные значения параметров  $Y$  объекта моделирования:

$$L: X \rightarrow Y, \quad X \in \Omega_X, \quad Y \in \Omega_Y, \quad (2.1)$$

где  $\Omega_X$  и  $\Omega_Y$  – множества допустимых значений входных и выходных параметров для моделируемого объекта. В зависимости от природы моделируемого объекта элементами множеств  $\Omega_X$  и  $\Omega_Y$  могут являться любые математические объекты (числа, векторы, тензоры, функции, множества и т.п.).

Схема отображения системы  $S$  в модель  $M$  с множеством входов  $\Omega_X$  и выходов  $\Omega_Y$  изображена на рис. 2.1.

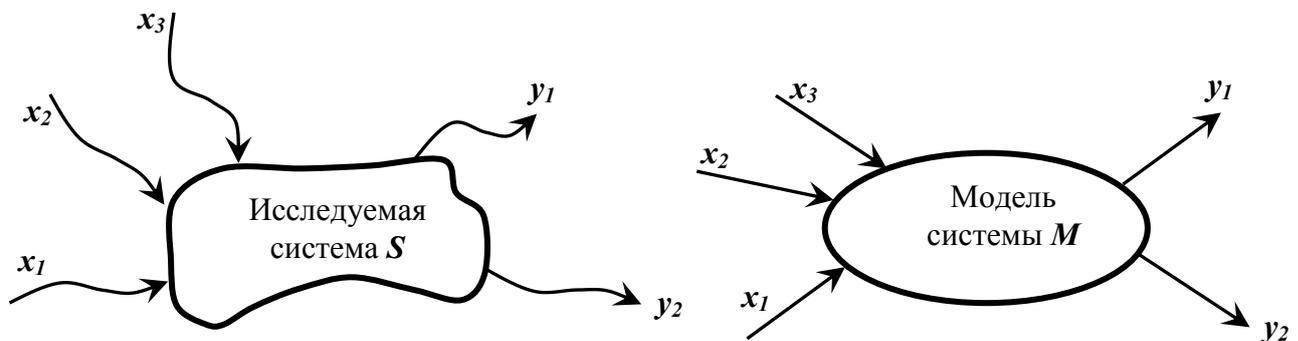


Рис. 2.1. Схема отображения системы  $S$  в модель  $M$

Понятие оператора в приведенном определении может трактоваться достаточно широко. Это может быть как некоторая функция, связывающая входные и выходные значения, так и отображение, представляющее символическую запись системы алгебраических, дифференциальных, интегродифференциальных или интегральных уравнений. Наконец, это может быть некоторый алгоритм, совокупность правил или таблиц, обеспечивающих нахождение (или установление) выходных параметров по заданным исходным значениям.

Определение математической модели через понятие оператора является более конструктивным с точки зрения построения классификации таких моделей, поскольку включает в себя все многообразие имеющихся в настоящее время математических моделей.

Бурное развитие методов математического моделирования и многообразие областей их использования привело к появлению огромного количества моделей самого разного типа. В связи с этим возникает необходимость в определенном упорядочивании, классификации существующих и появляющихся математических моделей. Учитывая большое число возможных классификационных признаков и субъективность их выбора, появление все новых классов моделей, следу-

ет отметить условность и незавершенность рассматриваемой ниже классификации [7].

Представляется возможным подразделить математические модели на различные классы в зависимости от:

- сложности объекта моделирования;
- оператора модели (подмодели);
- входных и выходных параметров;
- способа исследования модели;
- цели моделирования.

Рассмотрим классификацию математических моделей в зависимости от сложности объекта моделирования [7].

В качестве объекта моделирования может выступать как некоторое материальное тело или конструкция, так и природный, технологический или социальный процесс либо явление. Все объекты моделирования можно разделить на две группы: простые и объекты-системы (рис. 2.2).

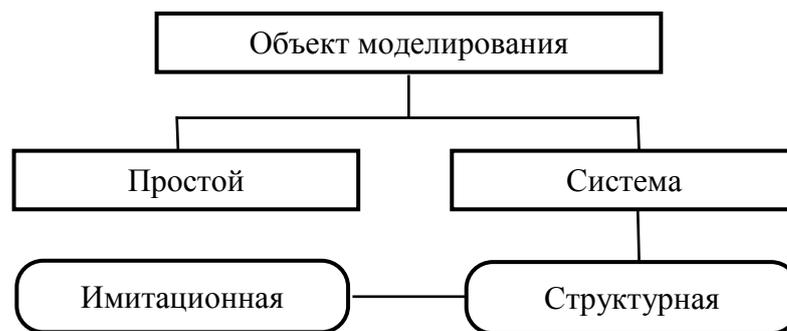


Рис. 2.2. Классификация объектов моделирования

В первом случае при моделировании не рассматривается внутреннее строение объекта, не выделяются составляющие его элементы или подпроцессы. В качестве примера подобного объекта можно привести материальную точку в классической механике.

Модели объектов-систем, учитывающие свойства и поведение отдельных элементов, а также взаимосвязи между ними, называются структурными. Среди структурных динамических систем выделяют в отдельный подкласс имитационные системы, состоящие из конечного числа элементов, каждый из которых имеет конечное число состояний. Число связей между элементами также предполагается конечным. Моделирование взаимодействий элементов внутри системы осуществляется с помощью некоторого алгоритма, реализуемого обычно с использованием ЭВМ.

Рассмотрим классификацию математических моделей в зависимости от оператора модели [7].

Выше отмечалось, что любая математическая модель может рассматриваться как некоторый оператор  $L$ , который является алгоритмом или определяется совокупностью уравнений - алгебраических, обыкновенных

дифференциальных уравнений (ОДУ), систем ОДУ (СОДУ), дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП), интегродифференциальных уравнений (ИДУ) и др. (рис. 2.3).

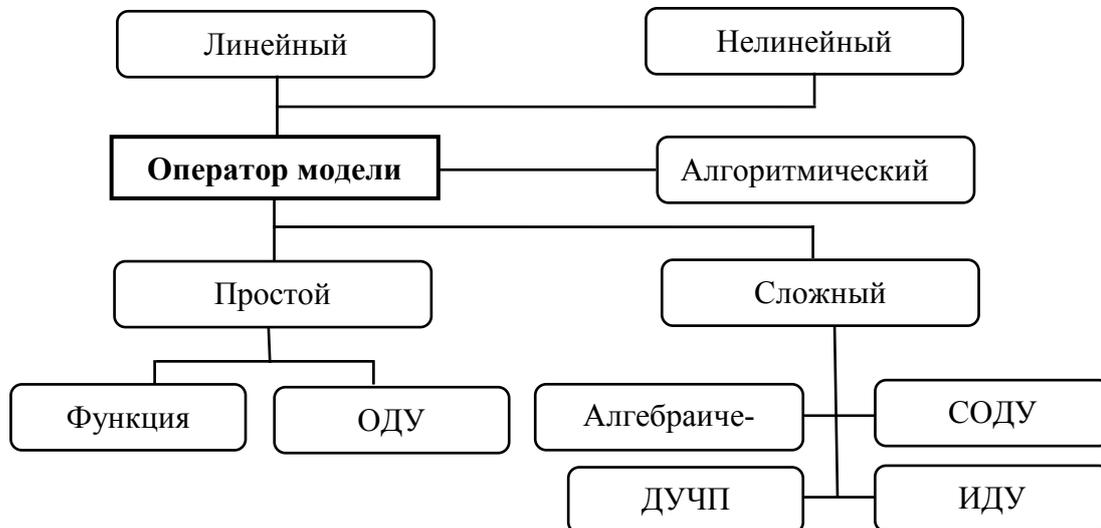


Рис. 2.3. Классификация в зависимости от вида оператора модели

В зависимости от вида оператора математические модели можно разделить на простые и сложные.

В случае, когда оператор модели является алгебраическим выражением, отражающим функциональную зависимость выходных параметров  $Y$  от входных  $X$ , модель будем называть простой.

Простые модели чаще всего являются результатом обобщения и анализа экспериментальных данных, полученных в результате наблюдений за исследуемым объектом или явлением. Модель, включающая системы дифференциальных и интегральных соотношений, уже не может быть отнесена к простым, так как для своего исследования требует применения довольно сложных математических методов. Однако в двух случаях она может быть сведена к простым:

1) если полученная для подобной модели система математических соотношений может быть разрешена аналитически;

2) если результаты вычислительных экспериментов со сложной моделью аппроксимированы некоторой алгебраической зависимостью. В настоящее время известно достаточно большое число подходов и методов аппроксимации (например, метод наименьших квадратов или метод планирования экспериментов).

Далее рассмотрим классификацию математических моделей в зависимости от параметров модели (рис. 2.4).

В общем случае параметры, описывающие состояние и поведение объекта моделирования, разбиваются на ряд непересекающихся подмножеств:

- совокупность входных (управляемых) воздействий на объект  $\Omega_X$ ;

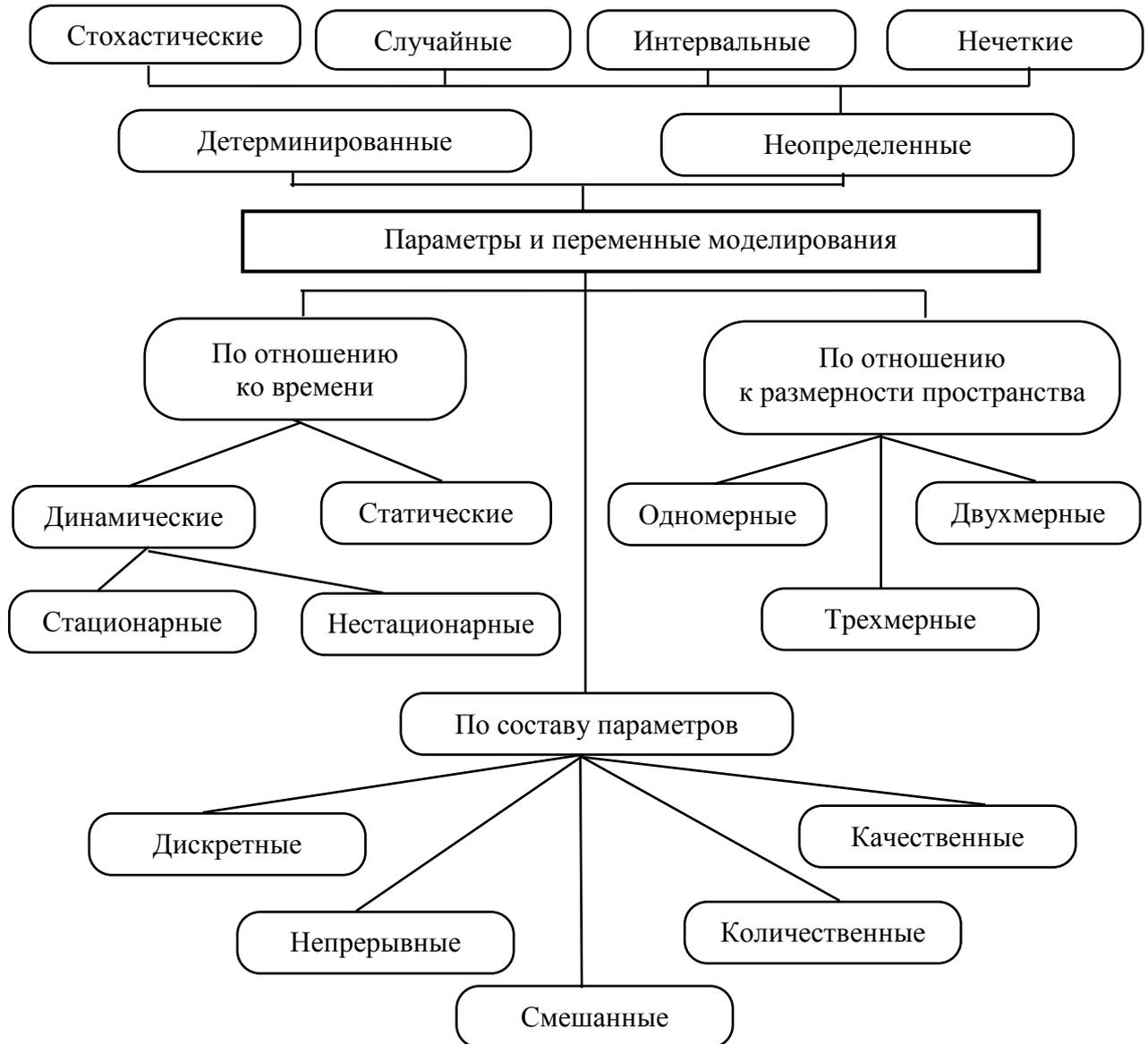


Рис. 2.4. Классификация математических моделей в зависимости от параметров

- совокупность воздействий внешней среды (неуправляемых)  $\Omega_E$ ;
- совокупность внутренних (собственных) параметров объекта  $\Omega_Z$ ;
- совокупность выходных характеристик  $\Omega_Y$ .

При построении модели возможны следующие варианты описания неопределенности параметров [7]:

1) детерминированное - значения всех параметров модели определяются детерминированными величинами (т.е. каждому параметру соответствует конкретное целое, вещественное или комплексное число либо соответствующая функция). Данный способ соответствует полной определенности параметров;

2) стохастическое - значения всех или отдельных параметров модели определяются случайными величинами, заданными плотностями вероятности. В литературе наиболее полно исследованы случаи нормального (гауссова) и показательного распределения случайных величин;

3) случайное - значения всех или отдельных параметров модели устанавливаются случайными величинами, заданными оценками плотностей вероятности, полученными в результате обработки ограниченной экспериментальной выборки данных параметров. Эта форма описания тесно связана с предыдущей. Однако в рассматриваемом случае получаемые результаты моделирования будут существенным образом зависеть от точности оценок моментов и плотностей вероятности случайных параметров, от постулируемых законов распределения и объема выборок;

4) интервальное - значения всех или отдельных параметров модели описываются интервальными величинами, заданными интервалом, образованным минимальным и максимально возможными значениями параметра;

5) нечеткое - значения всех или отдельных параметров модели описываются функциями принадлежности соответствующему нечеткому множеству. Такая форма используется, когда информация о параметрах модели задается экспертом на естественном языке, а следовательно, в «нечетких» (с позиции математики) терминах типа «много больше пяти», «около нуля».

Разделение моделей на одномерные, двумерные и трехмерные применимо для таких моделей, в число параметров которых входят координаты пространства, и связано с особенностями реализации этих моделей, равно как и с резким увеличением их сложности при возрастании размерности (с «проклятием размерности» по образному выражению Р. Беллмана). Как правило, увеличение размерности модели приводит к росту числа используемых математических соотношений. Особенно сложны в реализации трехмерные модели, требующие высокопроизводительной вычислительной техники с большим объемом оперативной и дисковой памяти. При разработке модели стараются (если это возможно) понизить размерность. Необоснованное понижение размерности модели может существенно исказить результаты моделирования.

Из всей совокупности параметров при разработке различных моделей отдельно следует рассмотреть учет времени. Как и координаты, время относится к независимым переменным, от которых могут зависеть остальные параметры модели. В различных ситуациях объект исследования может по разному испытывать влияние времени. Обычно чем меньше масштаб объекта, тем существеннее зависимость его параметров от времени.

Классификация математических моделей в зависимости от целей моделирования представлена на рис. 2.5.

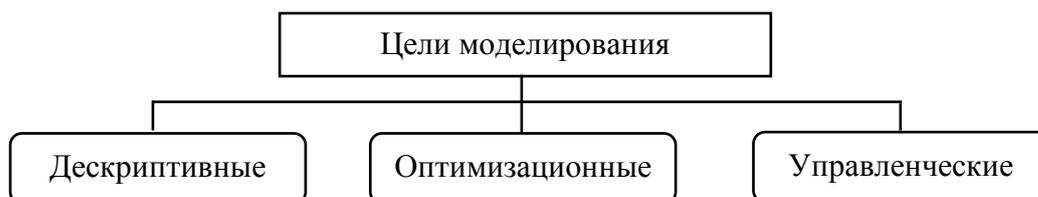


Рис. 2.5. Классификация в зависимости от целей моделирования

Целью дескриптивных моделей (от лат. *descriptio* - описание) является установление законов изменения параметров модели. В качестве примера такой модели можно привести модель движения материальной точки под действием приложенных сил, использующая второй закон Ньютона. Задавая положение и скорость точки в начальный момент времени (входные параметры), массу (собственный параметр) и закон изменения прикладываемых сил (внешние воздействия), можно определить скорость и координаты материальной точки в любой момент времени (выходные параметры). Полученная модель описывает зависимость выходных параметров от входных. Поэтому дескриптивные модели являются реализацией описательных и объяснительных содержательных моделей на формальном уровне моделирования.

Оптимизационные модели предназначены для определения оптимальных (наилучших) с точки зрения некоторого критерия параметров моделируемого объекта или же для поиска оптимального (наилучшего) режима управления некоторым процессом. Часть параметров модели относят к параметрам управления, изменяя которые можно получать различные варианты наборов значений выходных параметров. Как правило, данные модели строятся с использованием одной или нескольких дескриптивных моделей и включают некоторый критерий, позволяющий сравнивать различные варианты наборов значений выходных параметров между собой с целью выбора наилучшего. На область значений входных параметров могут быть наложены ограничения в виде равенств и неравенств, связанные с особенностями рассматриваемого объекта или процесса. Целью оптимизационных моделей является поиск таких допустимых параметров управления, при которых критерий выбора достигает своего «наилучшего значения».

Управленческие модели применяются для принятия эффективных управленческих решений в различных областях целенаправленной деятельности человека. В отличие от оптимизационных моделей, где критерий выбора считается определенным и искомое решение устанавливается из условий его экстремальности, в управленческих моделях необходимо введение специфических критериев оптимальности, которые позволяют сравнивать альтернативы при различных неопределенностях задачи.

Классификация математических моделей в зависимости от методов реализации приведена на рис. 2.6.

Метод реализации модели относят к аналитическим, если он позволяет получить выходные параметры в виде аналитических выражений, т.е. выражений, в которых используется не более чем счетная совокупность арифметических операций и переходов к пределу. Очень часто аналитическое решение для модели представляют в элементарных или специальных функциях: показательных, логарифмических, тригонометрических, гиперболических и т.п. Для получения значений этих функций при конкретных значениях входных параметров используют их разложение в ряды (например, Тейлора). Аналитические методы реализации модели являются более ценными в том плане, что позволяют с меньшими

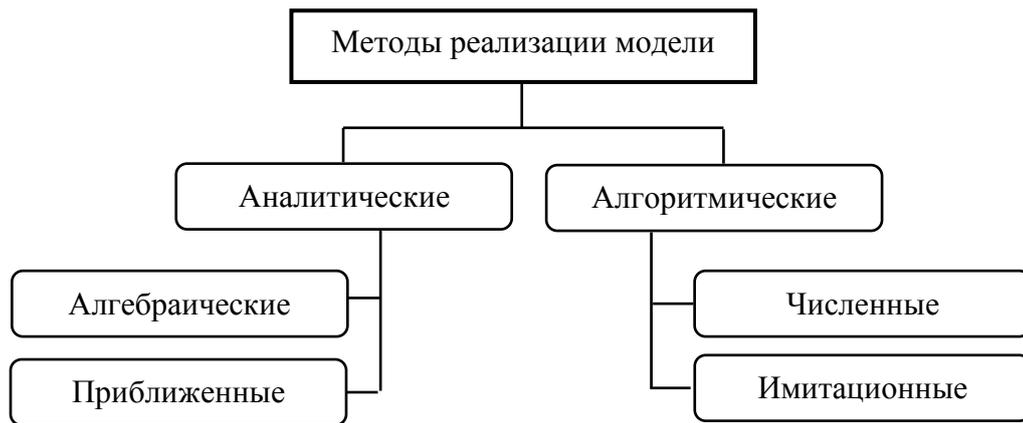


Рис. 2.6. Классификация в зависимости от методов реализации

вычислительными затратами изучить свойства объекта моделирования, применяя традиционные хорошо развитые математические методы анализа аналитических функций. Существенно, что применение аналитических методов возможно без использования ЭВМ (за исключением случаев, когда аналитическое решение определяется в рядах и для его доведения до числа требуются трудоемкие вычисления с применением ЭВМ). Кроме того, знание аналитического выражения для искомых параметров позволяет исследовать фундаментальные свойства объекта, его качественное поведение, строить новые гипотезы о его внутренней структуре. Следует отметить, что возможности аналитических методов существенно зависят от уровня развития соответствующих разделов математики.

В настоящее время мощный всплеск интереса к аналитическим методам при реализации моделей связан с появлением пакетов математических вычислений (MATHCAD<sup>®</sup>, MATLAB<sup>®</sup>, MATHEMATICA<sup>®</sup> и др.). Спектр решаемых данными пакетами задач очень велик и постоянно расширяется (элементарная математика, символьные операции с полиномами, производными и интегралами, с векторами и матрицами, задачи теории поля и векторного анализа, метод конечных элементов и т.п.). Применение подобных программных средств не только упрощает процедуру получения аналитического решения, но и облегчает последующий анализ полученного решения с применением различного рода визуализаторов. Возможности математического пакета MATHCAD<sup>®</sup> и примеры его применения будут рассмотрены далее и на практических занятиях.

При численном подходе совокупность математических соотношений модели заменяется конечномерным аналогом. Это чаще всего достигается дискретизацией исходных соотношений, т.е. переходом от функций непрерывного аргумента к функциям дискретного аргумента. После дискретизации исходной задачи выполняется построение вычислительного алгоритма, т.е. последовательности арифметических и логических действий, выполняемых на ЭВМ и позволяющих за конечное число шагов получить решение диск-

ретной задачи. Найденное решение дискретной задачи принимается за приближенное решение исходной математической задачи.

Степень приближения определяемых с помощью численного метода искомых параметров модели зависит как от погрешностей самого метода, связанных с заменой исходной модели ее дискретным аналогом, так и от ошибок округления, возникающих при выполнении любых расчетов на ЭВМ в связи с конечной точностью представления чисел в ее памяти. Основным требованием к вычислительному алгоритму является необходимость получения решения исходной задачи с заданной точностью за конечное число шагов. Возможности пакетов ANSYS<sup>®</sup>, LS-DYNA3D<sup>®</sup> для решения задач ОМД методом конечных элементов и примеры его применения будут рассмотрены далее и на практических занятиях.

Если при численном подходе дискретизации подвергалась полученная система математических соотношений, то при имитационном подходе на отдельные элементы разбивается сам объект исследования. В этом случае система математических соотношений для объекта-системы в целом не записывается, а заменяется некоторым алгоритмом, моделирующим ее поведение и учитывающим взаимодействие друг с другом моделей отдельных элементов системы. Модели отдельных элементов могут быть как аналитическими, так и алгебраическими.

Алгоритмические модели, использующие как численный, так и имитационный подход, не позволяют получить решения задач в аналитической форме, что затрудняет и усложняет процесс анализа результатов моделирования. Так как применение моделей данного типа возможно лишь при наличии вычислительной техники, то их эффективность зависит от мощности и быстродействия ЭВМ. Несомненным достоинством алгоритмических моделей является отсутствие принципиальных ограничений на сложность модели, что позволяет применять их для исследования систем произвольной сложности.

Использование математической модели, построенной алгоритмическими методами, аналогично проведению экспериментов с реальным объектом, только вместо реального эксперимента с объектом проводится вычислительный эксперимент с его моделью. Задавая конкретный набор значений исходных параметров модели, в результате вычислительного эксперимента находим конкретный набор приближенных значений искомых параметров. Для исследования поведения объекта при новом наборе исходных данных необходимо проведение нового вычислительного эксперимента.

В обработке металлов давлением математические модели классифицируются по следующим признакам [7]:

- по назначению;
- по происхождению;
- по состоянию системы оборудование–обрабатываемая заготовка;
- по точности.

По назначению математические модели ОМД подразделяются на описательные и оптимизирующие. Описательные модели предназначены только для описания процесса, т.е. только для прогнозирования его параметров. Оптимизирующие модели, кроме описания процесса содержат обязательно, некоторую целевую функцию.

По происхождению, т.е. по источнику получения использованных исходных предположений, математические модели процессов ОМД делятся на теоретические и экспериментальные. Теоретические модели создаются на основе наиболее общих современных научных знаний о процессе пластической деформации металлов и сплавов с использованием минимального объема экспериментальных данных. Базой для создания таких моделей служит современная теория механики сплошных сред и обработки металлов давлением. Экспериментальные модели создаются на основе статистического анализа наблюдений за ходом процесса и установления корреляционных связей между его параметрами.

По состоянию системы оборудование–обрабатываемая заготовка модели подразделяются на динамические и статические. Динамические модели предназначены для описания процесса ОМД в его развитии. Поэтому во всех динамических моделях входит время протекания процесса. Наличие временной характеристики в динамических моделях позволяет учитывать влияние любой нестационарности (кинематической, температурной, силовой, геометрической и т.п.) при прогнозировании параметров процесса ОМД и поведения системы оборудование–обрабатываемая заготовка. Динамические модели обеспечивают наиболее полное и всесторонне описание процесса ОМД как в нестационарных, так и стационарных условиях.

Моделирование – метод системного анализа. Но часто в системном анализе при модельном подходе исследования может совершаться одна методическая ошибка, а именно, - построение корректных и адекватных моделей (подмоделей) подсистем системы и их логически корректная увязка не дает гарантий корректности построенной таким способом модели всей системы. Модель, построенная без учета связей системы со средой и ее поведения по отношению к этой среде, может часто лишь служить еще одним подтверждением теоремы Геделя (о неполноте формальных систем), а точнее, ее следствия, утверждающего, что в сложной изолированной системе могут существовать истины и выводы, корректные в этой системе и некорректные вне ее.

Моделирование (в значении "метод", "модельный эксперимент") рассматривается как особая форма эксперимента, эксперимента не над самим оригиналом (это называется простым или обычным экспериментом), а над копией (заместителем) оригинала. Здесь важен изоморфизм систем (оригинальной и модельной) – изоморфизм, как самой копии, так и знаний, с помощью которых она была предложена.

Модели и моделирование применяются по основным направлениям:

- обучение (как моделям, моделированию, так и самим моделям);
- познание и разработка теории исследуемых систем (с помощью каких-либо моделей, моделирования, результатов моделирования);
- прогнозирование (выходных данных, ситуаций, состояний системы);
- управление (системой в целом, отдельными подсистемами системы), выработка управленческих решений и стратегий;
- автоматизация (системы или отдельных подсистем системы).

## 2.2. Системные принципы построения математических моделей

Математические модели в количественной форме, с помощью логико-математических конструкций, описывают основные свойства объекта, процесса или системы, его параметры, внутренние и внешние связи.

Для построения математической модели необходимо:

- тщательно проанализировать реальный объект или процесс;
- выделить его наиболее существенные черты и свойства;
- определить переменные, т.е. параметры, значения которых влияют на основные черты и свойства объекта;
- описать зависимость основных свойств объекта, процесса или системы от значения переменных с помощью логико-математических соотношений (уравнения, равенства, неравенства, логико-математические конструкции);
- выделить внутренние связи объекта, процесса или системы с помощью ограничений, уравнений, равенств, неравенств, логико-математических конструкций;
- определить внешние связи и описать их с помощью ограничений, уравнений, равенств, неравенств, логико-математических конструкций.

Математическое моделирование, кроме исследования объекта, процесса или системы и составления их математического описания, также включает:

- построение алгоритма, моделирующего поведение объекта, процесса или системы;
- проверка адекватности модели и объекта, процесса или системы на основе вычислительного и натурного эксперимента;
- корректировка модели;
- использование модели.

Математическое описание исследуемых процессов и систем зависит от:

- природы реального процесса или системы и составляется на основе законов физики, химии, механики, термодинамики, гидродинамики, электротехники, теории пластичности, теории упругости и т.д.
- требуемой достоверности и точности изучения и исследования реальных процессов и систем.

На этапе выбора математической модели устанавливаются: линейность и нелинейность объекта, процесса или системы, динамичность или статичность, стационарность или нестационарность, а также степень детерминированности исследуемого объекта или процесса. При математическом моделировании сознательно отвлекаются от конкретной физической природы объектов, процессов или систем и, в основном, сосредотачиваются на изучении количественных зависимостей между величинами, описывающими эти процессы.

Математическая модель никогда не бывает полностью тождественна рассматриваемому объекту, процессу или системе. Основанная на упрощении, идеализации она является приближенным описанием объекта. Поэтому результаты, полученные при анализе модели, носят приближенный характер. Их точность определяется степенью адекватности (соответствия) модели и объекта.

Построение (синтез) математической модели может основываться на классическом и системном подходах [10] (рис. 2.7). Процесс синтеза модели  $M$  на основе классического подхода (индуктивного) подхода представлен на рис. 2.7а. Реальный объект, подлежащий моделированию, разбивается на отдельные подсистемы, т.е. выбираются исходные данные  $D$  для моделирования и ставятся цели  $C$ , отображающие отдельные стороны процесса моделирования. По отдельной совокупности исходных данных  $D$  ставится цель моделирования отдельной стороны функционирования системы, на базе этой цели формируется некоторая компонента  $K$  будущей модели. Совокупность компонент объединяется в модель.

Таким образом, разработка модели  $M$  на базе классического подхода означает суммирование отдельных компонент в единую модель, причем каждая из компонент решает свои собственные задачи и изолирована от других частей модели.

Классический подход может быть использован для реализации сравнительно простых моделей, в которых возможно разделение и взаимно независимое рассмотрение отдельных сторон функционирования реального объекта. Для модели сложного объекта такая разобщенность решаемых задач недопустима, так как приводит к значительным затратам ресурсов при реализации модели на базе конкретных программно-технических средств. Можно отметить две отличительные стороны классического подхода: наблюдается движение от частного к общему, создаваемая модель (система) образуется путем суммирования отдельных её компонент и не учитывает возникновение нового системного эффекта.

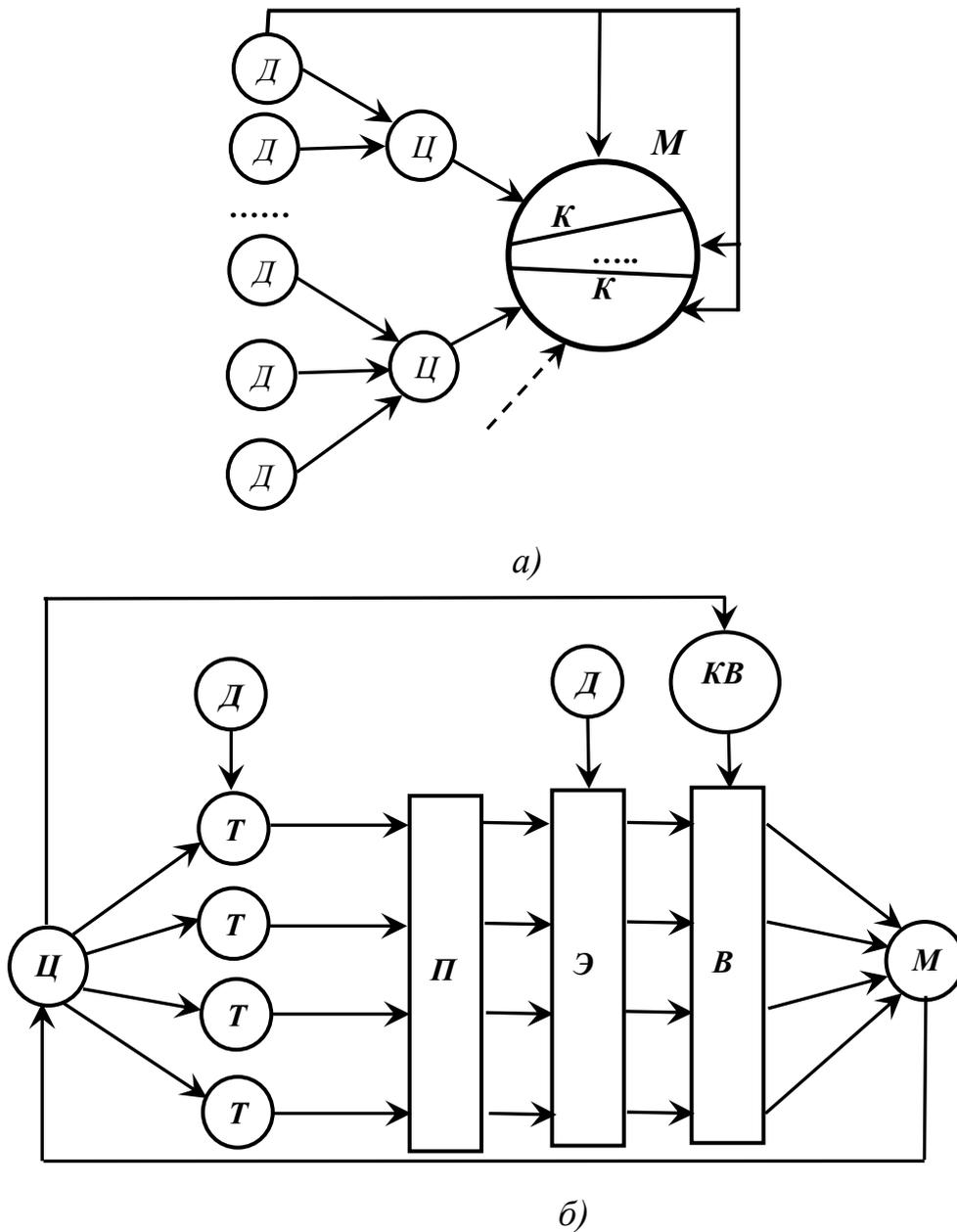


Рис. 2.7. Процесс синтеза модели на основе классического а) и системного б) подходов

Процесс синтеза модели  $M$  на основе системного подхода представлен на рис. 2.7б. На основе исходных данных  $D$ , которые известны из анализа внешней надсистемы (среды), тех ограничений, которые накладываются на систему сверху либо исходя из возможностей её реализации, и на основе цели функционирования формулируются исходные требования  $T$  к модели системы  $S$ . На базе этих требований формулируются ориентировочно некоторые подсистемы  $\Pi$ , элементы  $\mathcal{E}$  и осуществляется наиболее сложный этап синтеза – выбор  $B$  составляющих системы, для чего используются специальные критерии выбора  $KB$ .

## 2.3 Этапы построения математической модели

Рассмотренный в предыдущем параграфе подход можно выразить совокупностью правил, которые называют технологией создания математических моделей [7].

Процесс построения любой математической модели можно представить последовательностью этапов, представленных на рис. 2.8.

### 2.3.1. Обследование объекта моделирования

Этап обследования включает следующие работы [7]:

- тщательное обследование собственно объекта моделирования с целью выявления основных факторов, механизмов, влияющих на его поведение, определения соответствующих параметров, позволяющих описывать моделируемый объект;
- сбор и проверка имеющихся экспериментальных данных об объектах-аналогах, проведение при необходимости дополнительных экспериментов;
- аналитический обзор литературных источников, анализ и сравнение между собой построенных ранее моделей данного объекта (или подобных рассматриваемому объекту);
- анализ и обобщение всего накопленного материала, разработка общего плана создания математической модели.

На основе собранной информации об объекте моделирования формулируют содержательную постановку задачи моделирования, которая, как правило, не бывает окончательной и может уточняться и конкретизироваться в процессе разработки модели.

Весь собранный в результате обследования материал о накопленных к данному моменту знаниях об объекте, содержательная постановка задачи моделирования, дополнительные требования к реализации модели и представлению результатов оформляются в виде технического задания на проектирование и разработку модели.

Техническое задание является итоговым документом, заканчивающим этап обследования и является очень важным и ответственным. Чем более полную информацию удастся собрать об объекте на этапе обследования, тем более четко можно выполнить содержательную постановку задачи, более полно учесть накопленный опыт и знания, избежать многих сложностей на последующих этапах разработки модели. Особенно строго необходимо формулировать требования к будущей модели. Неконкретные и нечеткие требования могут серьезно затруднить процесс создания модели, вызвать бесконечные доработки и улучшения. В целом этап проработки технического задания может составлять до 30% времени, отпущенного на создание всей модели, и даже более - с учетом возможного уточнения и переформулировки.



Рис. 2.8. Этапы построения математической модели

Понимая огромную важность рассматриваемого этапа, техническое задание следует подвергать внутренней и внешней экспертизе независимыми экспертами, не участвующими в его разработке.

**Пример.** Содержательная постановка задачи моделирования уширения при кузнечной протяжке [13, 15].

Разработать математическую модель, позволяющую описать влияние вытяжки на уширение при протяжке полосы прямоугольного поперечного сечения при различных подачах.

Модель должна позволять:

- вычислять уширение при протяжке в плоских бойках в зависимости от вытяжки и величины подачи;
- силу осадки при влиянии внеконтактных зон.

Исходные данные:

- размеры исходного поперечного сечения полосы;
- размеры деформированного поперечного сечения полосы;
- шаг подачи заготовки под боек;
- свойства материала заготовки и напряжения трения.

### 2.3.2. Концептуальная постановка задачи моделирования

На основании содержательной модели разрабатывается концептуальная, или «естественно-научная» (физическая, химическая, биологическая и т.д.), постановка задачи моделирования, служащая основой для концептуальной модели объекта.

Концептуальная постановка задачи моделирования - это сформулированный в терминах конкретных дисциплин (физики, химии, биологии и т.д.) перечень основных вопросов, интересующих исследователя, а также совокупность гипотез относительно свойств и поведения объекта моделирования [7].

Концептуальная модель строится как некоторая идеализированная модель объекта, записанная в терминах конкретных (например, естественно-научных) дисциплин. Для этого формулируется совокупность гипотез о поведении объекта, его взаимодействии с окружающей средой, изменении внутренних параметров. Как правило, эти гипотезы правдоподобны в том смысле, что для их обоснования могут быть приведены некоторые теоретические доводы и использованы экспериментальные данные, основанные на собранной ранее информации об объекте. В выборе и обосновании принимаемых гипотез в значительной степени проявляется искусство, опыт и знания, накопленные исследователем. Согласно принятым гипотезам определяется множество параметров, описывающих состояние объекта, а также перечень законов, управляющих изменением и взаимосвязью этих параметров между собой.

**Пример.** Концептуальная постановка задачи моделирования уширения при кузнечной протяжке.

Определить закон влияния вытяжки полосы прямоугольного поперечного сечения на уширение и силу на бойках в каждый текущий момент времени при заданной подаче, учитывающий влияние внешних по отношению к геометрическим границам очага деформации частей полосы.

Математическая модель задачи в такой концептуальной постановке относится к объемной задаче формоизменения и может быть основана на вариационных методах обработки металлов давлением [13,15–17].

Примем следующие гипотезы и допущения:

- кинематически возможное поле скоростей должно соответствовать минимальному расходу энергии деформации;
- материал идеально пластичен;

- в материале допустимы разрывы скоростей в неограниченно тонких слоях, поверхностях разрыва скоростей;
- силы контактного трения постоянны и не зависят от нормальных давлений;
- деформация металла симметрична относительно срединных сечений очага деформации;
- влияние радиусов скруглений бойков и переходных участков поковки на уширение несущественно.

### 2.3.3. Математическая постановка задачи моделирования

Законченная концептуальная постановка позволяет сформулировать математическую постановку задачи моделирования, включающую совокупность различных математических соотношений, описывающих поведение и свойства объекта моделирования.

Математическая постановка задачи моделирования - это совокупность математических соотношений, описывающих поведение и свойства объекта моделирования [7].

Как было отмечено в п. 2.1, совокупность математических соотношений определяет вид оператора модели. Наиболее простым будет оператор модели в случае, если он представлен системой алгебраических уравнений. Подобные модели можно назвать моделями аппроксимационного типа, так как для их получения часто используют различные методы аппроксимации имеющихся экспериментальных данных о поведении выходных параметров объекта моделирования в зависимости от входных параметров и воздействий внешней среды, а также от значений внутренних параметров объекта.

Однако область применения моделей подобного типа ограничена. Для создания математических моделей сложных систем и процессов, применимых для широкого класса реальных задач требуется, как уже отмечалось выше, привлечение большого объема знаний, накопленных в рассматриваемой дисциплине (а в некоторых случаях и в смежных областях). В большинстве дисциплин (особенно естественно-научных) эти знания сконцентрированы в аксиомах, законах, теоремах, имеющих четкую математическую формулировку.

Следует отметить, что в обработке металлов давлением, основывающейся на механике сплошных сред, физике, технической механике принято выделять законы, справедливые для всех объектов исследования данной области знаний, и соотношения, описывающие поведение отдельных объектов или их совокупностей. К числу первых в физике и механике относятся, например, уравнения баланса массы, количества движения, энергии и т.д., справедливые при определенных условиях для любых материальных тел,

независимо от их конкретного строения, структуры, состояния, химического состава. Уравнения этого класса подтверждены огромным количеством экспериментов, хорошо изучены и в силу этого применяются в соответствующих математических моделях как данность. Соотношения второго класса в физике и механике называют определяющими, или физическими уравнениями, или уравнениями состояния. Они устанавливают особенности поведения материальных объектов или их совокупностей (например, упругих или пластических сред) при воздействиях различных внешних факторов.

В качестве классических примеров определяющих соотношений можно привести закон Гука в теории упругости или условие пластичности Мизеса.

Соотношения второго класса гораздо менее изучены, а в ряде случаев их приходится устанавливать самому исследователю (особенно при анализе объектов, состоящих из новых материалов). Необходимо отметить, что определяющие соотношения - это основной элемент, «сердцевина» любой математической модели физико-механических процессов. Именно ошибки в выборе или установлении определяющих соотношений приводят к количественно (а в некоторых случаях и качественно) неверным результатам моделирования.

Совокупность математических соотношений указанных двух классов определяет оператор модели. В большинстве случаев оператор модели включает в себя систему обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ), дифференциальных уравнений в частных производных (ДУЧП) и/или интегродифференциальных уравнений (ИДУ). Для обеспечения корректности постановки задачи к системе ОДУ или ДУЧП добавляются начальные или граничные условия, которые, в свою очередь, могут быть алгебраическими или дифференциальными соотношениями различного порядка.

Выделим несколько наиболее распространенных типов задач для систем ОДУ или ДУЧП:

- задача Коши, или задача с начальными условиями, в которой по заданным в начальный момент времени переменным (начальным условиям) определяются значения этих искомым переменных для любого момента времени;

- начально-граничная, или краевая, задача, когда условия на искомую функцию выходного параметра задаются в начальный момент времени для всей пространственной области и на границе последней в каждый момент времени (на исследуемом интервале);

- задачи на собственные значения, в формулировку которых входят неопределенные параметры, определяемые из условия качественного изменения поведения системы (например, потеря устойчивости состояния равновесия или стационарного движения, появление периодического режима, резонанс и т.д.).

Для контроля правильности полученной системы математических соотношений требуется проведение ряда обязательных проверок [7].

Контроль размерностей, включающий правило, согласно которому приравниваться и складываться могут только величины одинаковой размерности. При переходе к вычислениям данная проверка сочетается с контролем использования одной и той же системы единиц для значений всех параметров.

Контроль порядков, состоящий из грубой оценки сравнительных порядков складываемых величин и исключением малозначимых параметров. Например, если для выражения  $x + y + z = 0$  в результате оценки установлено, что в рассматриваемой области значений параметров модели  $|z| \ll |x|$  и  $|z| \ll y$ , то третьим слагаемым в исходном выражении можно пренебречь.

Контроль характера зависимостей заключается в проверке того, что направление и скорость изменения выходных параметров модели, вытекающие из выписанных математических соотношений, такие, как это следует непосредственно из «физического» смысла изучаемой модели.

Контроль экстремальных ситуаций - проверка того, какой вид принимают математические соотношения, а также результаты моделирования, если параметры модели или их комбинации приближаются к предельно допустимым для них значениям, чаще всего к нулю или бесконечности. В подобных экстремальных ситуациях модель часто упрощается, математические соотношения приобретают более наглядный смысл, упрощается их проверка. Например, в задачах механики деформируемого твердого тела деформация материала в исследуемой области в изотермических условиях возможна лишь при приложении нагрузок, отсутствие же нагрузок должно приводить к отсутствию деформаций.

Контроль граничных условий, включающий проверку того, что граничные условия действительно наложены, что они использованы в процессе построения искомого решения и что значения выходных параметров модели на самом деле удовлетворяют данным условиям.

Контроль физического смысла - проверка физического или иного, в зависимости от характера задачи, смысла исходных и промежуточных соотношений, появляющихся по мере конструирования модели.

Контроль математической замкнутости, состоящий в проверке того, что выписанная система математических соотношений дает возможность, притом однозначно, решить поставленную математическую задачу. Например, если задача свелась к отысканию  $n$  неизвестных из некоторой системы алгебраических или трансцендентных уравнений, то контроль замкнутости состоит в проверке того факта, что число независимых уравнений должно быть  $n$ . Если их меньше  $n$ , то надо установить недостающие уравнения, а если их больше  $n$ , то либо уравнения зависимы, либо при их составлении допущена ошибка. Однако если уравнения получаются из эксперимента или в результате наблюдений, то возможна постановка задачи, при которой число уравнений превышает  $n$ , но сами уравнения удовлетворяются лишь приближенно, а решение ищется, например, по методу наименьших квадратов. Неравенств среди условий также может быть любое число, как это бывает, например, в задачах линейного программирования. Свойство математической замкнутости системы математических соот-

ношений тесно связано с введенным Ж. Адамаром понятием корректно поставленной математической задачи [93], т.е. задачи, для которой решение существует, оно единственно и непрерывно зависит от исходных данных. В данном случае решение считается непрерывным, если малому изменению исходных данных соответствует достаточно малое изменение решения.

Понятие корректности задачи имеет большое значение в прикладной математике. Например, численные методы решения оправдано применять лишь к корректно поставленным задачам. При этом далеко не все задачи, возникающие на практике, можно считать корректными (например, так называемые обратные задачи). Доказательство корректности конкретной математической задачи - достаточно сложная проблема, она решена только для некоторого класса математически поставленных задач. Проверка математической замкнутости является менее сложной по сравнению с проверкой корректности математической постановки. В настоящее время активно исследуются свойства некорректных задач, разрабатываются методы их решения. Аналогично понятию «корректно поставленная задача» можно ввести понятие «корректная математическая модель».

Математическая модель является корректной, если для нее осуществлен и получен положительный результат всех контрольных проверок: размерности, порядков, характера зависимостей, экстремальных ситуаций, граничных условий, физического смысла и математической замкнутости.

**Пример.** Математическая постановка задачи моделирования уширения при кузнечной протяжке [13, 15].

Для математического описания задачи составим схему протяжки полосы плоскими бойками (рис. 2.9).

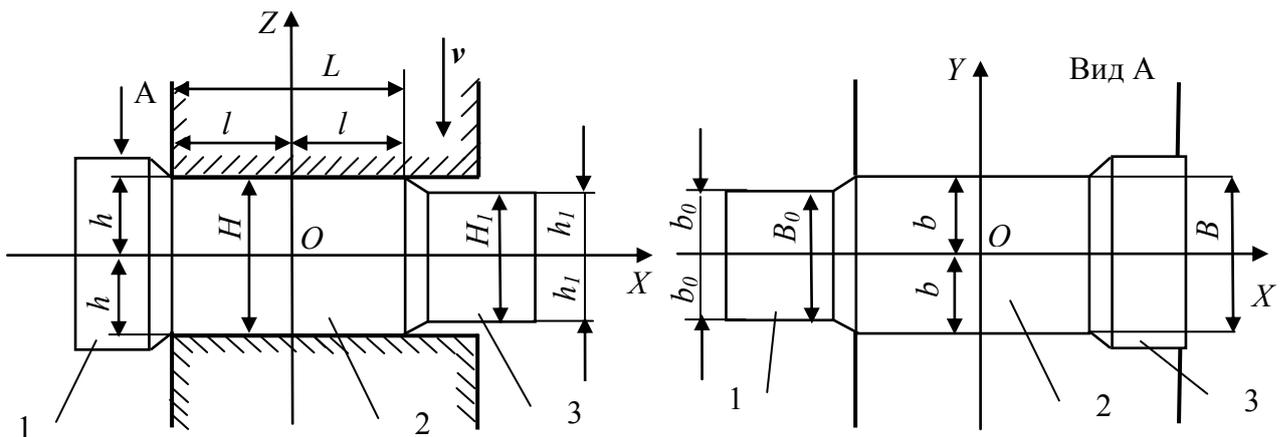


Рис. 2.9. Схема протяжки полосы плоскими бойками

Кинематически возможная модель протяжки полосы представляет её состоящей из трех областей – блоков: внешних жестких 1 и 3 и центрального блока 2 (рис. 2.9), ограниченного координатными поверхностями  $x=\pm l$ ,  $y=\pm b$  и  $z=\pm h$ , где распределение скоростей непрерывно.

Уширение зависит от отношения потока металла, проходящего через боковые грани полосы в очаге деформации

$$Q_y = 2|v_y|_{y=b} LH$$

к общему потоку металла, перемещаемого бойками

$$Q = 2vLB,$$

что можно выразить через показатель уширения

$$\varphi = \frac{Q_y}{Q}. \quad (2.2)$$

По смыслу задачи  $\varphi$  ограничена  $0 < \varphi < 1$ .

Задача ставится следующим образом: найти такие функциональные зависимости скоростей, при которых полная энергия деформации

$$I = N_p + N_i + N_d + N_\tau \rightarrow \min, \quad (2.3)$$

принимает минимальное значение.

При этом должно выполняться условие несжимаемости

$$\frac{dv_x(x)}{dx} + \frac{dv_y(y)}{dy} + \frac{dv_z(z)}{dz} = 0, \quad (2.4)$$

а скорости в блоке 2 должны удовлетворять кинематическим граничным условиям

$$v_z = \begin{cases} -v, & z = h, \\ v, & z = -p, \end{cases} \quad (2.5)$$

где  $v$  – скорость бойков относительно срединного сечения полосы  $z = 0$ , а также удовлетворять условиям непрерывности нормальных составляющих скоростей в плоскостях симметрии и на плоских границах блока 2 с блоками 1 и 3:

$$v_x = 0 \text{ при } x = 0; v_x = \text{const при } x = \pm l; \quad (2.6a)$$

$$v_y = 0 \text{ при } y = 0; v_z = 0 \text{ при } z = 0. \quad (2.6б)$$

### 2.3.4. Выбор метода решения задачи

Поиск решения задачи сводится к отысканию некоторых зависимостей искомых величин от исходных параметров модели. Все методы решения можно подразделить на аналитические и алгоритмические.

Аналитические методы более удобны для последующего анализа результатов, но применимы лишь для относительно простых моделей. В случае, если математическая задача (хотя бы и в упрощенной постановке) допускает аналитическое решение, последнее, без сомнения, предпочтительнее численного, что достаточно широко используется в теории обработки металлов давлением.

Алгоритмические методы сводятся к некоторому алгоритму, реализующему вычислительный эксперимент с использованием ЭВМ. Точность моделирования в подобном эксперименте существенно зависит от выбранного метода и его параметров (например, шага интегрирования). Алгоритмические методы, как правило, более трудоемки в реализации, требуют от исследователя хорошего знания методов вычислительной математики, обширной библиотеки специального программного обеспечения и мощной вычислительной техники. Современные модели на базе алгоритмических методов разрабатываются в исследовательских организациях, которые зарекомендовали себя как авторитетные научные школы в соответствующей области знания.

Приближенные и численные методы исследования поставленных математических задач относятся к обширному разделу - современной вычислительной математике. Численные методы применимы лишь для корректных математических задач, что существенно ограничивает использование их в математическом моделировании.

Общим для всех численных методов является сведение математической задачи к конечномерной [12]. Это чаще всего достигается дискретизацией исходной задачи, т.е. переходом от функции непрерывного аргумента к функциям дискретного аргумента.

Применение любого численного метода неминуемо приводит к погрешности результатов решения задачи. Выделяют три основных составляющих возникающей погрешности при численном решении исходной задачи [7]:

- неустраняемая погрешность, связанная с неточным заданием исходных данных (начальные и граничные условия, коэффициенты и правые части уравнений);
- погрешность метода, связанная с переходом к дискретному аналогу исходной задачи (например, заменяя производную  $y'(x)$  разностным

аналогом  $(y(x+\Delta x) - y(x))/\Delta x$ , получаем погрешность дискретизации, имеющую при  $\Delta x \rightarrow 0$  порядок  $\Delta x$ ;

- ошибка округления, связанная с конечной разрядностью чисел, представляемых в ЭВМ.

Естественным требованием для конкретного вычислительного алгоритма является согласованность в порядках величин перечисленных трех видов погрешностей.

Численный, или приближенный, метод реализуется всегда в виде вычислительного алгоритма. Поэтому все требования, предъявляемые к алгоритму, применимы и к вычислительному алгоритму. Прежде всего, алгоритм должен быть реализуем - обеспечивать решение задачи за допустимое машинное время. Важной характеристикой алгоритма является его точность, т.е. возможность получения решения исходной задачи с заданной точностью  $\varepsilon > 0$  за конечное число  $Q(\varepsilon)$  действий. Очевидно, чем меньше  $\varepsilon$ , тем больше затрачиваемое машинное время. Для очень малых значений  $\varepsilon$  время вычислений может быть недопустимо большим. Поэтому на практике добиваются некоторого компромисса между точностью и затрачиваемым машинным временем. Очевидно, что для каждой задачи, алгоритма и типа ЭВМ имеется свое характерное значение достигаемой точности.

Время работы алгоритма зависит от числа действий  $Q(\varepsilon)$ , необходимых для достижения заданной точности. Для любой математической задачи, как правило, можно предложить несколько алгоритмов, позволяющих получить решение с заданной точностью, но за разное число действий  $Q(\varepsilon)$ . Алгоритмы, включающие меньшее число действий для достижения одинаковой точности, будем называть более экономичными, или более эффективными.

В процессе работы вычислительного алгоритма на каждом акте вычислений возникает некоторая погрешность. При этом от действия к действию она может возрастать или не возрастать (а в некоторых случаях даже уменьшаться). Если погрешность в процессе вычислений неограниченно возрастает, то такой алгоритм называется неустойчивым, или расходящимся. В противном случае алгоритм называется устойчивым, или сходящимся.

Выше уже отмечалось, что вычислительная математика объединяет огромный пласт разнообразных, быстро развивающихся численных и приближенных методов, поэтому практически невозможно привести их законченную классификацию. Стремление получить более точные, эффективные и устойчивые вычислительные алгоритмы приводит к появлению многочисленных модификаций, учитывающих специфические особенности конкретной математической задачи или даже особенности моделируемых объектов.

Можно выделить следующие группы численных методов [12] по объектам, к которым они применяются:

- интерполяция и численное дифференцирование;
- численное интегрирование;
- определение корней линейных и нелинейных уравнений;

- решение систем линейных уравнений (подразделяют на прямые и итерационные методы);
- решение систем нелинейных уравнений;
- решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений;
- решение краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений;
- решение уравнений в частных производных;
- решение интегральных уравнений.

Указанные численные методы далее будут рассмотрены более подробно.

**Пример.** Математическая постановка задачи моделирования уширения при кузнечной протяжке [13, 15].

Для получения решения сформулированной выше задачи (2.3) – (2.6) можно использовать как аналитические, так и численные методы.

Аналитическое решение представлено в работах [13,15].

Граничные условия (2.5) и (2.6) будут удовлетворены, если распределение скоростей описывается частным решением условия несжимаемости (2.4), а именно

$$\begin{aligned}v_x &= C_1x + C_2, \\v_y &= C_3y + C_4, \\v_z &= -(C_1 + C_3)z + C_5,\end{aligned}$$

где  $C_1, C_2, \dots, C_5$  – постоянные интегрирования.

Принимая по обоснованию работы [15]  $C_2 = C_4 = C_5 = 0$ , а  $C_1 + C_3 = v/h$  получим

$$\begin{aligned}v_x &= C_1x, \\v_y &= C_3y \\v_z &= -(C_1 + C_3)z.\end{aligned}$$

В дальнейшем вводят замену (2.2) [15]

$$\varphi = C_3 \frac{h}{v}.$$

После замены кинематически возможные скорости в полосе и соответствующие им интенсивности скоростей деформаций определяются следующим образом:

для блока 1

$$v_{x1} = -(1 - \varphi)v \frac{l}{h}; \quad v_{y1} = v_{z1} = \xi_{i1} = 0;$$

для блока 2

$$v_{x2} = (1 - \varphi)v \frac{x}{h}; \quad v_{y2} = \varphi v \frac{y}{h}; \quad v_{z2} = -v \frac{z}{h};$$

$$\xi_{i2} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{v}{h} \sqrt{1 - \varphi + \varphi^2};$$

для блока 3

$$v_{x3} = (1 - \varphi)v \frac{l}{h}; \quad v_{y3} = v_{z3} = \xi_{i3} = 0.$$

Сечения поковки  $x = \pm l$  являются поверхностями разрывов скоростей (см. рис. 2.9). Эти разрывы:  $|\Delta v|_{12}$  на стыке блоков 1 и 2,  $|\Delta v|_{23}$  на стыке блоков 2 и 3 при одних и тех же координатах  $y$  и  $z$ , а  $x = \pm l$  одинаковы

$$|\Delta v|_{12} = |\Delta v|_{23} = \sqrt{[v_{z1} - v_{z2}]^2 + [v_{y1} - v_{y2}]^2} = \frac{v}{h} \sqrt{z^2 + \varphi^2 y^2}.$$

Скорости скольжения по поверхностям контакта при  $z = \pm h$  распределяются симметрично

$$v_c = \sqrt{v_{x2}^2 + v_{y2}^2} = \frac{v}{h} \sqrt{(1 - \varphi)^2 x^2 + \varphi^2 y^2}.$$

В результате составляющие уравнения мощностей всех сил (2.3) на указанных выше кинематически возможных скоростях

$$N_p = 2Pv, \tag{2.7}$$

где  $P$  – сила деформации, действующая на боек;

$$N_i = 8 \int_0^h \int_0^b \int_0^l \sigma_s \xi_{i2} dx dy dz = 16 \sigma_s \frac{v}{\sqrt{3}} bl \sqrt{1 - \varphi + \varphi^2}; \tag{2.8a}$$

$$N_\tau = 8 \int_0^b \int_0^l \tau_k v_c dx dy; \tag{2.8б}$$

$$N_\Delta = \frac{4}{\sqrt{3}} \sigma_s \int_0^h \int_0^b |\Delta v|_{12} dz dy + \frac{4}{\sqrt{3}} \sigma_s \int_0^h \int_0^b |\Delta v|_{23} dz dy. \tag{2.8B}$$

Приравнивая мощность внешних сил (2.7) к сумме мощностей деформации (2.8а), трения (2.8б) и на поверхностях разрыва (2.8в) получим выражение для силы протяжки

$$P = \frac{2}{\sqrt{3}} \sigma_s LB \sqrt{1 - \varphi + \varphi^2} + \frac{\sigma_s}{4\sqrt{3}} \left( HB_0 + \varphi B_0^2 + \frac{H_1^2}{H} B + \varphi \frac{H_1}{H} B^2 \right) + \frac{\tau_k}{2H} [(1 - \varphi)L + \varphi B] LB. \quad (2.9)$$

Полученное уравнение содержит неизвестный параметр  $\varphi$ , который найдем из необходимого условия минимума верхней оценки силы протяжки (2.9)

$$\frac{\partial P}{\partial \varphi} = \frac{\sigma_s}{\sqrt{3}} \frac{(2\varphi - 1)LB}{\sqrt{1 - \varphi + \varphi^2}} + \frac{\sigma_s}{4\sqrt{3}} \left( B_0^2 + \frac{H_1}{H} B \right) + \frac{\tau_k}{2H} (B - L) LB = 0.$$

Из приведенного условия минимума силы  $P$  следует

$$\varphi = 0,5 - \frac{1}{8LB} \left( B_0^2 + \frac{H_1}{H} B^2 \right) - \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{\tau_k}{\sigma_s} \frac{B - H}{H} \leq 1, \quad (2.10)$$

где  $B_0$  – начальная ширина полосы,  $H_1$  – конечная высота ее ранее протянутого участка,  $B, L, H$  – текущие значения ширины полосы, длины площадки контакта (шаг подачи) и расстояние между бойками в очаге деформации.

В работе [18] приведено решение для аналогичной задачи при максимальном напряжении трения  $\tau_k = \sigma_s / \sqrt{3}$

$$\varphi = \frac{1}{1 + 0,18 \frac{B^2}{H_1} L}. \quad (2.11)$$

### 2.3.5. Реализация математической модели на ЭВМ

Реализация математической модели на ЭВМ может быть выполнена путем применения пакетов математических вычислений (MATHCAD<sup>®</sup>, MATLAB<sup>®</sup>, MATHEMATICA<sup>®</sup> и др.), многоцелевого конечно-элементного расчетного комплекса ANSYS<sup>®</sup>, с подключенным расчетным модулем LS-DYNA3D<sup>®</sup>, системой конечно-элементного 3D моделирования DEFORM<sup>®</sup> -

3D. Возможности и особенности применения указанных программных средств будут рассмотрены далее.

При создании специализированного программного комплекса для реализации разработанной математической модели необходимо выполнить несколько этапов работ:

- составление технического задания на разработку пакета программ программного обеспечения;
- проектирование структуры программного комплекса;
- кодирование алгоритма;
- тестирование и отладка;
- сопровождение и эксплуатация.

Техническое задание на разработку программного обеспечения оформляют в виде спецификации. Примерная форма спецификации включает следующие семь разделов [7]:

1. Название задачи - дается краткое определение решаемой задачи, название программного комплекса, указывается система программирования для его реализации и требования к аппаратному обеспечению (компьютеру, внешним устройствам и т.д.).

2. Описание - подробно излагается математическая постановка задачи, описываются применяемая математическая модель для задач вычислительного характера, метод обработки входных данных для задач не вычислительного (логического) характера и т.д.

3. Управление режимами работы программы - формируются основные требования к способу взаимодействия пользователя с программой (интерфейс «пользователь-компьютер»).

4. Входные данные - описываются входные данные, указываются пределы, в которых они могут изменяться, значения, которые они не могут принимать, и т.д.

5. Выходные данные - описываются выходные данные, указывается, в каком виде они должны быть представлены (в числовом, графическом или текстовом), приводятся сведения о точности и объеме выходных данных, способах их сохранения и т.д.

6. Ошибки - перечисляются возможные ошибки пользователя при работе с программой (например, ошибки при вводе входных данных), указываются способы диагностики (в данном случае под диагностикой понимается выявление, обнаружение ошибок при работе программного комплекса) и защиты от этих ошибок на этапе проектирования, а также возможная реакция пользователя при совершении им ошибочных действий и реакция программного комплекса (компьютера) на эти действия.

7. Тестовые задачи - приводятся один или несколько тестовых примеров, на которых в простейших случаях проводится отладка и тестирование программного комплекса.

Большинство программ, реализующих математические модели, состоят из трех основных частей:

- препроцессора (подготовка и проверка исходных данных модели);
- процессора (решение задачи, реализация вычислительного эксперимента);
- постпроцессора (отображение полученных результатов).

Применение математического пакета MATHCAD<sup>®</sup> при решении задачи моделирования уширения при кузнечной протяжке будет рассмотрено в учебном практикуме. А после освоения в рамках практикума по применению многоцелевого конечно-элементного расчетного комплекса ANSYS<sup>®</sup>, с подключенным расчетным модулем LS-DYNA3D<sup>®</sup> и системы конечно-элементного 3D моделирования DEFORM<sup>®</sup> - 3D необходимо будет самостоятельно выполнить моделирование этой задачи.

### 2.3.6. Проверка адекватности моделей

Под адекватностью математической модели понимают степень соответствия результатов, полученных по разработанной модели, данным эксперимента или тестовой задачи.

Проверка адекватности модели преследует две цели:

1) убедиться в справедливости совокупности гипотез, сформулированных на этапах концептуальной и математической постановок. Переходить к проверке гипотез следует лишь после проверки использованных методов решения, комплексной отладки и устранения всех ошибок и конфликтов, связанных с программным обеспечением;

2) установить, что точность полученных результатов соответствует точности, оговоренной в техническом задании.

Проверка разработанной математической модели выполняется путем сравнения с имеющимися экспериментальными данными о реальном объекте или с результатами других, созданных ранее и хорошо себя зарекомендовавших моделей. В первом случае говорят о проверке путем сравнения с экспериментом, во втором - о сравнении с результатами решения тестовой задачи.

Решение вопроса о точности моделирования зависит от требований, предъявляемых к модели, и ее назначения. При этом должна учитываться точность получения экспериментальных результатов или особенности постановок тестовых задач. В моделях, предназначенных для выполнения оценочных и прикидочных расчетов, удовлетворительной считается точность 10—15%. В моделях, используемых в управляющих и контролирующих системах, требуемая точность может быть 1—2% и даже более.

**Пример.** Проверка адекватности задачи моделирования уширения при кузнечной протяжке.

Проверка разработанной математической модели (2.10) выполняется путем сравнения с имеющимися экспериментальными данными [15] (рис. 2.10), коэффициент корреляции 0,87-0,95.

Как следует из приведенных данных, расчетные значения достаточно хорошо описывают данные экспериментов, что может служить подтверждением адекватности модели.

Для модели (2.11) также на рис. 2.11 приведено сопоставление расчетных и экспериментальных данных [18], коэффициент корреляции 0,8.

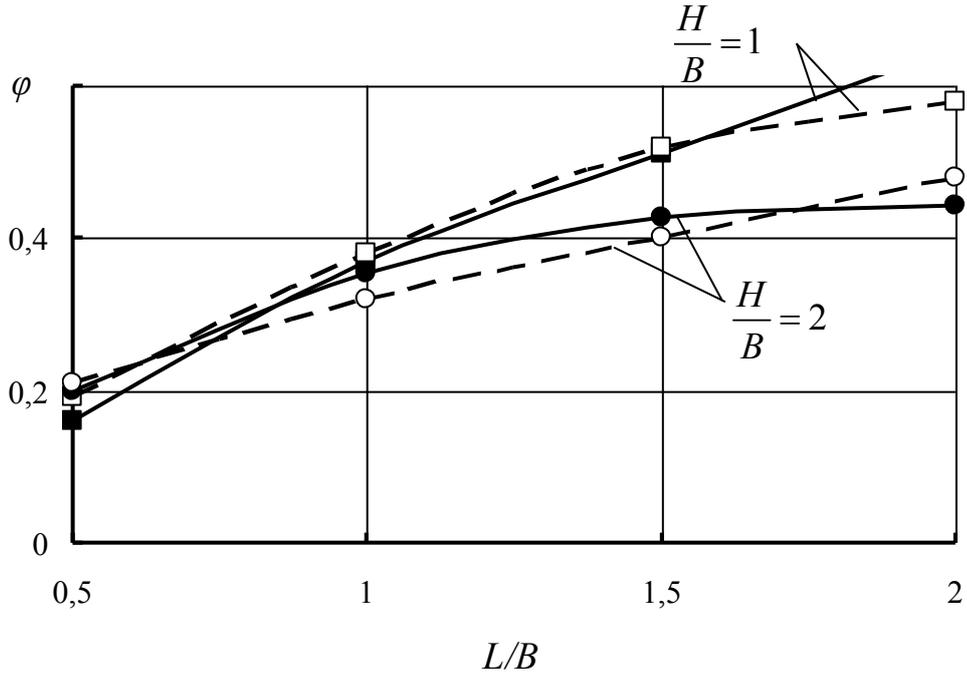


Рис. 2.10. Коэффициент уширения при протяжке полосы плоскими бойками:  
 — по расчетным данным; - - - - по опытным данным

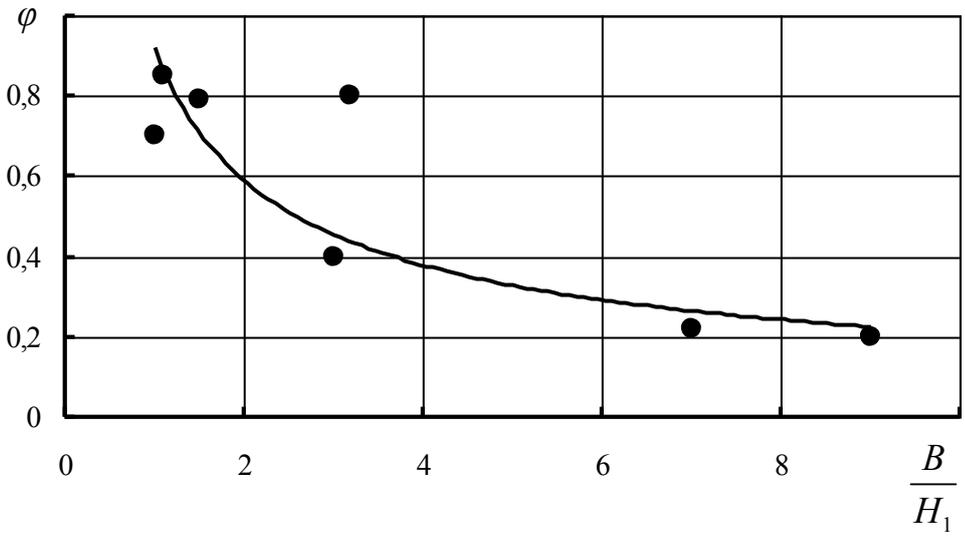


Рис. 2.11. Коэффициент уширения при протяжке полосы плоскими бойками:  
 — по расчетным данным; ● — по опытным данным А.П. Чекмарева

## 2.4. РАЗРАБОТКА СТРУКТУРЫ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ОМД

Проблемы, встающие при построении математических моделей, связаны с построением множества  $Z$  (1.2), отображений  $\gamma$  (1.5),  $\psi$  (1.6) и выходного отображения  $\varphi$  (1.7) и изучением их свойств. Это круг проблем анализа систем. Анализ обычно начинают с выявления всех факторов, которые оказывают влияние на поведение изучаемой системы. По существу, эта проблема связана с изучением и описанием множеств  $U$ ,  $U(\cdot)$ ,  $Y$  и  $Y(\cdot)$ . Далее встает задача описания динамических взаимосвязей между входами и выходами, т. е. задача построения модели этих связей, которая называется проблемой идентификации. С проблемой идентификации тесно связана проблема представления системы, где должны быть изучены возможные описания закономерностей поведения, т. е. возможная форма отображений  $\gamma$ ,  $\psi$  и  $\varphi$ . С точки зрения синтеза эта проблема состоит в построении системы, реализующей заданное вход – выход поведение.

### 2.4.1. Классификация технологических процессов и систем

Классификация необходима для установления математического строения описывающих ТП множеств и отображений.

ТП называется дискретным, если  $U = \{u_k: k=0, 1, \dots, K\}$ , причём  $T = \{t_k: k=0, 1, \dots, K\}$  при условии  $t_{k-1} < t_k$  и  $u_k(t_k)$ . Для систем этого класса характерно  $Q = \{q(t_k) = \gamma(t_k; u_k(t_k))\}$  и  $Z = \{z(t_k + \tau) = \psi(t_k + \tau, t_k, q(t_k))\}$ .

ТП называется непрерывным, если  $U = \{u(t): t \in [0, T]\}$ ,  $T$  не аддитивно, а непрерывно, тогда  $Q = \{q(t) = \gamma(t; t_0, u(t_0))\}$  и  $Z = \{z(t) = \psi(t; t_0, \tau, q(t, \cdot))\}$ .

ТП называется стационарным, если 1)  $T$  является аддитивной группой; 2) для любого  $\tau \in T$  из  $q(\cdot) \in Q(\cdot)$  следует  $\bar{u}(\cdot) \in U(\cdot)$ , где для всех  $t \in T$  выполняется равенство  $\bar{u}(t - \tau) = u(t)$ ; 3)  $\psi(t; t_0, q(\cdot)) = \psi(t - \tau; t_0 - \tau, \bar{u}(\cdot))$  для всех  $\tau \in T$ ;

4) отображение  $\varphi(t; t, z(\cdot))$  не зависит от  $t$ .

ТП называется нестационарным, если не выполнены условия стационарности.

ТП называется ограниченной первоначальной настройкой, если  $V = \emptyset$ , и полуограниченным, если в процессе функционирования отсутствует возможность управления размерами и формой области пластической деформации (например, процессы волочения, прессования, объемной штамповки и т.п.).

ТП называется (вполне) управляемым, если из любого состояния в данный момент времени его можно перевести в любое другое состояние под действием некоторого управления, т. е.

$$\psi(z', v) = z''$$

и разрешимо относительно  $v$  при любых  $z'$  и  $z''$ .

ТП называется наблюдаемым, если с формальной стороны восстановление начального состояния  $z$  по известным  $v$  и  $y$  сводится к решению уравнения  $y = \varphi(z, v)$  относительно неизвестного  $z$ .

ТП называется настраиваемым (задача установочности), если при помощи фиксированного управления его можно перевести в фиксированное конечное состояние независимо от начального, т. е.

$$\forall z \in Z, \psi(z, v^*) = z^*,$$

состояние  $z^*$  называется установочным, а управление  $v^*$  – установочным управлением.

Важной проблемой анализа ТП является проблема устойчивости. Она возникает при изучении вопроса, будет ли ТП выполнять свою функцию и назначение в условиях, когда возникают различные возмущения, что часто является проявлением неполного знания об окружающей среде и самом процессе. Пусть назначение ТП состоит в преобразовании входа  $u^0(\cdot)$ , который опосредованно через  $q(\cdot)$  порождает процесс  $z^0(\cdot)$ , в выход  $u^k(\cdot) \equiv y^0(\cdot)$ . Если в результате каких-то обстоятельств процесс  $z(\cdot)$  в пространстве состояний не совпадает с  $z^0(\cdot)$ , т. е.  $z^*(t_0) = z^0(t_0) + \Delta z(t_0)$ , что может быть следствием того, что в момент  $t_0$  появилось отклонение  $\Delta z(t_0)$ , то естественно возникает вопрос, сходится ли при  $t > t_0$  и  $t \rightarrow \infty$  процесс  $y^*(t) = \varphi(x^0, t, z^*(t))$  в некотором смысле к процессу  $y^0(\cdot)$  или будет близким к нему. Указанная сходимость будет иметь место, если  $\varphi(x^0, t, t_0, z^0 + \Delta z, u^0(\cdot))$  будет сходиться к  $\varphi(x^0, t, t_0, z^0, u^0(\cdot))$ . Процесс  $z^0(t)$  называется невозмущенным движением, а процесс  $z^*(\cdot)$  – возмущенным движением. Изучение свойств отображения  $\varphi$ , которые обеспечивают указанную сходимость процессов или их близость, составляет предмет теории устойчивости систем.

#### 2.4.2. Представления технологических процессов и систем

Исходными данными при постановке задач исследования технологических процессов являются только входы и выходы, т.е. их внешнее описание. Для установления структуры представления отображений, описывающих закономерности изменения состояний, необходимо рассмотреть разрешимость нахождения этих закономерностей по наблюдаемым входам и выходам. Рассмотрение будем выполнять с двух позиций:

- 1) формирования конечного состояния обработанного продукта, идентифицируемого характеристиками качества;
- 2) выхода ТП как результата функционирования по критериям точности, стабильности и надёжности.

При реализации процесса моделирования необходимо создавать модели для конкретных технологических процессов, как сложных систем. При решении этого вопроса сложную систему необходимо разбить на такую совокупность подсистем, которая наилучшим образом отражала бы работу и функциональное взаимодействие всех ее элементов. Использование такого принципа декомпозиции системы на подсистемы, подсистем на элементы позволяет создать модель сложной системы, опираясь на моделирующие алгоритмы элементов и алгоритмы их функционального взаимодействия. Совокупность моделирующих алгоритмов для элементов, разработанных указанным способом, с учетом алгоритма их взаимодействия определит исходный моделирующий алгоритм системы.

При создании моделей сложных систем практически всегда возникает вопрос о необходимости перехода к более сложным (или более простым) описаниям некоторых реальных элементов. В этом направлении широко известны работы И. Н. Коваленко [19] по кусочно–линейным агрегатам и описанию структуры систем многоуровневых схем сопряжения.

Элементами модели (1.4) являются отображения  $\gamma$  (1.5) и  $\psi$  (1.6), поэтому рассмотрим некоторые обобщения, которые можно применить к этим отображениям. Множество  $Q$  значений основной распределенной/сосредоточенной технологической нагрузки  $q(\cdot)$ ,  $\gamma: T \times U \rightarrow Q$  включает значения сил, нормальных и касательных напряжений, а также температур, распределенных на границе контакта между деформируемым металлом и инструментом.

Для обработки металлов давлением характерны две следующие группы процессов, которые связаны с условиями приложения основной распределенной/сосредоточенной технологической нагрузки  $q(\cdot)$  [20]. Группы разделим по характеру передачи силового воздействия на область пластической деформации:

Непосредственно поверхностью инструмента – процессы прокатки,ковки и штамповки.

Через материал – волочение, прямое и обратное прессование.

Вместе с тем появилась большая группа процессов прессования, в которых силовое воздействие создается инструментом на область пластической деформации, распространяющуюся за пределы конического очага деформации. Поэтому к двум этим группам необходимо добавить еще одну: непосредственно поверхностью инструмента и через материал – прессование с активным действием сил трения, процессы “Конформ”, “Экстороллинг”, “ЛАЙНЕКС” и разработанный на кафедре ОМД СФУ процесс прокатки–прессования [11].

Для процессов первой группы сила (сосредоточенный параметр) определяется по следующей формуле:

$$P_I = \iint_F \sigma_n dF = \iint_F (\sigma_S + \sigma_i) dF,$$

где  $\sigma_n$  – нормальное напряжение на границе контакта;  $F$  – площадь контактной поверхности;  $\sigma_S = \sigma_S(\varepsilon, \xi, \theta)$  – сопротивление металла пластической деформации, как функция величины деформации  $\varepsilon$ , скорости деформации  $\xi$  и температуры  $\theta$ ;  $\sigma_i$  – одно из минимальных для рассматриваемого процесса главных напряжений  $i=1, 2, 3$ .

Для процессов второй группы сила определяется по следующим формулам:

$$P_{II} = \sigma_n^* F_k \varphi,$$

когда сила приложена к поперечному сечению получаемого изделия  $F_k$  (например, при волочении);

$$P_{II} = \sigma_n^* F_0 \varphi,$$

когда сила приложена к исходному поперечному сечению  $F_0$  (например, при прессовании), причем  $\sigma_n^*$  – напряжение, распределенное по поперечному сечению  $F_k$  или  $F_0$ , а  $\varphi = \ln \frac{F_0}{F_k}$ .

Для третьей группы появляется новое условие, а именно, вектор сил, создаваемых непосредственно инструментом  $P_I$  должен быть равен или больше требуемого для деформации в коническом очаге деформации при прессовании  $P_{II}$ . Причем в  $P_I$  должна войти составляющая силы от активного трения

$$P_I = \iint_F \sigma_n dF + \iint_F \tau_{тр} dF,$$

а условие устойчивости процесса запишется в следующем виде

$$\frac{P_I}{P_{II}} \geq 1.$$

Любой процесс протекает во времени, причем для нестационарного процесса  $P(t, t_0)$  изменяется на всем интервале  $[t, T]$ , а для стационарного характерно наличие нестационарной переходной стадии, протекающей в интервале времени  $[t_0, t^*]$ . Если система в момент  $t_0$  находится в покое, т. е.  $P^0(t)=0$  при  $t \geq t_0$ , то ее поведение с момента  $t_0$  можно описать уравнением

$$P(t) = R^P(x; t, t_0)u(t, t_0, \cdot), \quad (2.12)$$

где  $u(t, t_0, \cdot)$  отражает изменение исходного состояния заготовки в процессе деформации  $U\{u(t, t_0) | \sigma_s(t, t_0; \varepsilon, \xi, \theta), v(t, t_0), \theta(t, t_0; x^\alpha)\}$ , а  $R^P(x; t, t_0): U(\cdot) \rightarrow P$ ;  $R^P(t, t_0)$  – оператор отображения, при этом задание  $u(t, t_0, \cdot)$  однозначно определяет  $P(t)$ .

Вид, аналогичный уравнению (2.12), будет иметь и уравнение для определения среднего значения нормального напряжения на контактной поверхности

$$\sigma_n(t) = R^\sigma(x; t, t_0)u(t, t_0, \cdot) \quad (2.13)$$

и распределения нормального напряжения на контактной поверхности

$$\sigma_n(t, x^\alpha) = R^\sigma(x; t, t_0; x^\alpha)u(t, t_0, \cdot).$$

Уравнения (2.12) и (2.13) представляют линейные отображения

$$\begin{aligned} \gamma(P; \cdot): T \times T \times P \times U &\rightarrow P, \\ \gamma(\sigma_n; \cdot): T \times T \times \sigma_n \times U &\rightarrow \sigma_n. \end{aligned}$$

Оператор  $R^\sigma$  для большинства задач находится из решения дифференциального уравнения первого порядка вида  $y' + p(x)y = q(x)$  или на основе энергетических методов. В последнем случае (2.12) принимают следующий вид

$$\sigma_n(t) = \sum R_i^\sigma(t, t_0)u(t, t_0, \cdot), \quad i=1, \dots, n,$$

где суммирование ведется по составляющим энергетического баланса.

Применительно к процессам ОМД время в уравнениях не присутствует в явном виде, а в качестве параметра обычно выступает изменение какого либо геометрического размера области пластической деформации во времени.

Кроме того, оператор  $R^\sigma$  может быть найден из решения дифференциального уравнения в частных производных  $\sigma_{ij,j} + \rho(g_i - w_i) = 0$ .

Для определения состояния  $Z$  на основе отображения  $\psi(z, x; \gamma(q; \cdot), \cdot): T \times T \times Z \times Q \times Q^T \rightarrow Z$ , математическую модель системы получают путем объединения компонентных и топологических уравнений, базирующиеся на уравнениях движения, равновесия и непрерывности.

Основу таких моделей составляют дифференциальные уравнения

$$Lz(x^\alpha) = f(x^\alpha), \quad (2.14)$$

где  $L$  – дифференциальный оператор;  $z(x^\alpha)$  – зависимая фазовая переменная;  $x^\alpha$  – вектор независимых (пространственных) координат;  $f(x^\alpha)$  – заданная функция.

Нестационарные уравнения в операторной форме запишутся в следующем виде

$$\frac{\partial z}{\partial t} + LZ = f(x^\alpha, t).$$

Для области упругой и пластической деформации на основании топологических уравнений – второго закона Ньютона  $\vec{F} = m\vec{w}$  (где  $\vec{F}$  – сумма всех сил, действующих на элементарный объем,  $m$  – его масса и  $\vec{w}$  – ускорение) и неразрывности  $\frac{d\rho}{dt} + \text{div}(\rho\vec{v}) = 0$ , уравнения (2.14) принимают следующий вид

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho g_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2},$$

где  $\sigma_{ij}$  – напряжение, действующее вдоль оси  $x_i$  в грани элемента, перпендикулярной оси  $x_j$ ;  $\rho$  – плотность;  $g_i$  – компонента вектора заданной распределенной массовой силы;  $u_i$  – компоненты вектора перемещения. Напряжения  $\sigma_{ij}$  могут быть связаны как с деформациями  $\varepsilon_{ij}$ , так и со скоростями деформации  $\xi_{ij}$

$$D_\sigma = \beta D_\varepsilon \text{ или } D_\sigma = \beta^* D_\xi,$$

где  $D_\sigma$ ,  $D_\varepsilon$  и  $D_\xi$  – соответственно девиаторы напряжений, деформаций и скорости деформации;  $\beta$  и  $\beta^*$  – скалярные множители.

Модели для анализа напряжений и деформаций часто оказываются более удобными, если представлены в интегральной форме, вытекающей из вариационных принципов механики [16,17].

Подходы к решению задач расчета напряженно–деформированного состояния при пластической деформации сегодня достаточно хорошо разработаны как аналитически, так и численно.

Требования на поведение системы обычно накладывают на выходной процесс, например, получение продукта с заданными свойствами. Однако, учитывая связь (1.7), их всегда можно (и это особенно целесообразно при решении задач для выработки определенно направленных воздействий, как для управления, так и для выбора рациональных технологических режимов процессов ограниченных первоначальной настройкой) переформулировать в виде условий, накладываемых на процесс в пространстве состояний.

В общем случае для данных условий модель (1.7) примет следующий вид

$$y(t) = \varphi(t; \tau, z(\tau; \cdot)).$$

Поскольку  $y(t)$  должна принадлежать заданной области ограничений  $D_Y$ ,  $y(t) \in D_Y$ , то и на  $z(t; \tau, \cdot)$  должно быть наложено требование принадлежности ограниченной области  $D_Z$ ,  $z(t; \tau, \cdot) \in D_Z$ . Размеры области  $D_Z$  могут быть определены обратным отображением  $\varphi^{-1}$

$$z(t; \tau, \cdot) = \varphi^{-1} y(t), \text{ при } y(t) \in D_Y \text{ и } z(t; \tau, \cdot) \in D_Z,$$

где  $D_Y = \{y \mid y_{i \min} \leq y_i \leq y_{i \max}\}$ ,  $i = \overline{1, n}$  и  $D_Z = \{z \mid z_{j \min} \leq z_j \leq z_{j \max}\}$ ,  $j = \overline{1, m}$ .

Однако множество состояний системы обычно бывает богаче множества  $Y$ , в чем проявляется, в частности, сложность системы и её наблюдаемость. Например, зависимость величины зерна от термодиформационных параметров деформирования в общем случае может быть выражена зависимостью

$$S = S(\varepsilon, \xi, \theta),$$

где  $S$  – величина зерна;  $\varepsilon$  – величина деформации;  $\xi$  – скорость деформации;  $\theta$  – температура деформации.

Структура, например, прессизделий из алюминиевых сплавов является распределенным параметром и обычно неоднородна вследствие неравномерности деформации, изменения температурных условий в течение процесса прессования и последующего охлаждения. Неоднородность структуры проявляется главным образом в изменении зерен уже в прессованном состоянии: в центральных слоях зерна крупнее и уменьшаются при переходе в периферийные слои. Структура изменяется и по длине прессизделия – выходная часть профиля обычно имеет крупнозернистую структуру, ближе к утяжному концу размеры зерен уменьшаются. Таким образом, состояние материала в области пластической деформации существенным образом влияет на состояние прессизделия, характеризуемое распределением структуры по объему.

В работе [21] установлено, что в пространстве параметров  $\varepsilon$ ,  $\xi$  и  $\theta$  существует не только отдельная точка, в которой достигается требуемое значение  $S$ , но и целая область, которую можно назвать областью устойчивости процесса по параметру заданной структуры (рис. 2.12). В связи с этим необходимо, чтобы из множества значений распределенных по области пластической деформации параметров  $\varepsilon$ ,  $\xi$  и  $\theta$ , их максимальные и минимальные значения находились в допустимых технологией производства пределах:

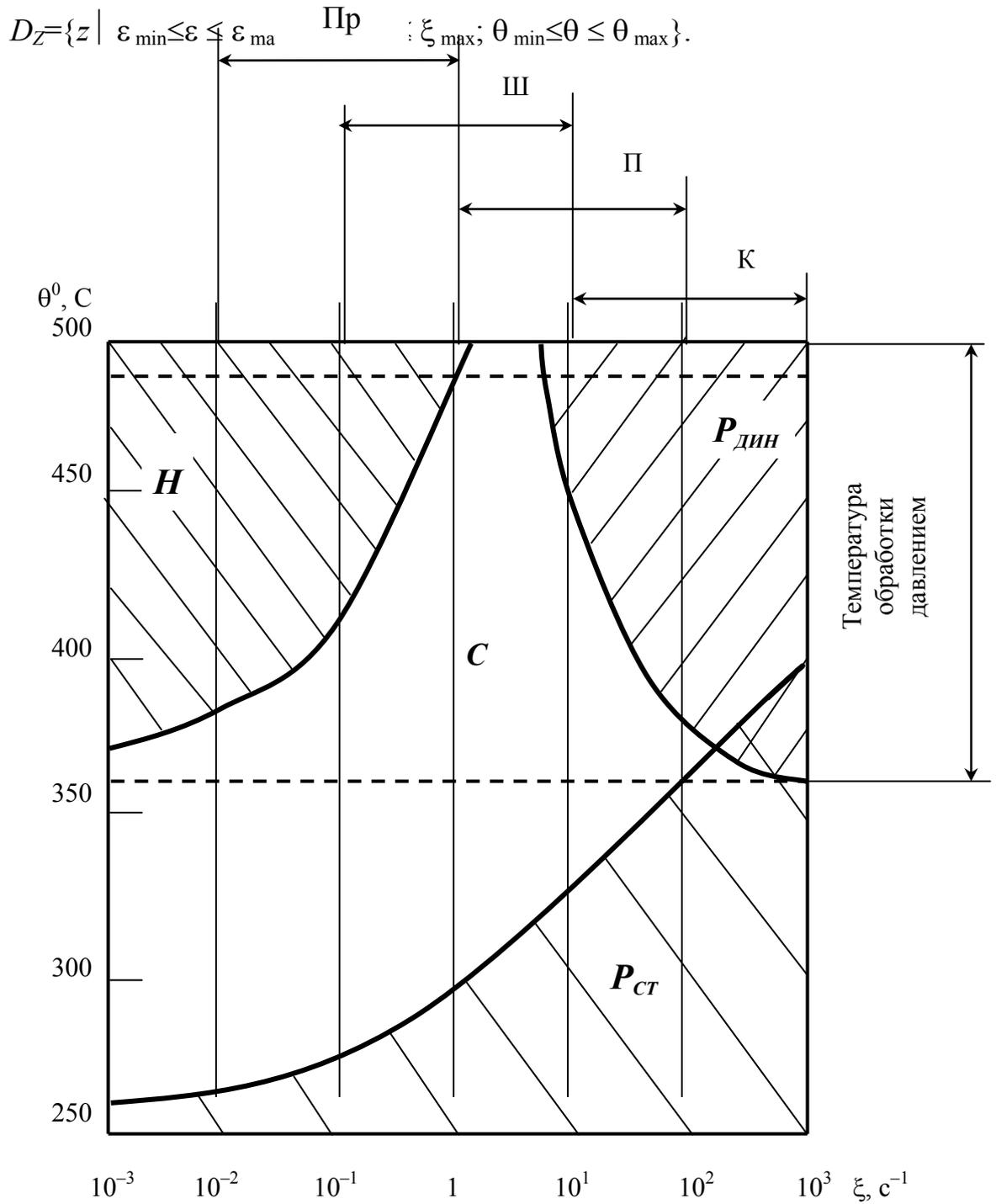


Рис. 2.12. Диаграмма структурных состояний сплава АМгб: *H* – нерекристаллизованная структура; *P<sub>ст</sub>* – структура, рекристаллизовавшаяся в ходе последеформационной термической обработки; *P<sub>дин</sub>* – структура, рекристаллизовавшаяся непосредственно при деформации и охлаждении после деформации; *C* – смешанная, частично рекристаллизованная структура; Пр – прессование; Ш – штамповка; П – прокатка; К – ковка на молоте

Модель определения типа структуры запишем в следующем виде

$$S = \Omega_1 S^I + \Omega_2 S^{II} + \Omega_3 S^{III},$$

причем

$$\Omega_1 = \begin{cases} 1, & \text{если } \Theta \geq a_1 \xi^{C_1}; \\ 0, & \text{если } \Theta < a_1 \xi^{C_1}, \end{cases}$$

$$\Omega_2 = \begin{cases} 0, & \text{если } \Theta \geq a_2 \xi^{C_2}; \\ 1, & \text{если } \Theta < a_2 \xi^{C_2}, \end{cases}$$

$$\Omega_3 = \begin{cases} 1, & \text{если } \Omega_1 = 0 \text{ и } \Omega_2 = 0; \\ 0, & \text{если } \Omega_1 = 1 \text{ и } \Omega_2 = 1, \end{cases}$$

где  $\Theta = a \xi^C$  уравнения границ раздела областей с заданной структурой. В соответствии с данными [21] из диаграммы структурных состояний сплава АМгб для применяемых на практике режимов прессования получим следующие уравнения границ  $\Omega_1$ :  $\Theta = 480 \xi^{0,05}$  и  $\Omega_2$ :  $\Theta = 300 \xi^{0,023}$ .

При таком подходе пространство состояний разбито на определенное число областей  $G_i, i = \overline{1, k}$ . В каждой области  $G_i$  искомая характеристика  $y = \varphi(z)$  может быть аппроксимирована как функцией достаточно простого вида, так и многомерным брусом или мажорирована эллипсоидом. Получаемая в результате модель может быть представлена в следующем виде

$$y(z) = \sum_{i=1}^k \Omega_i(z) \varphi_i(z), \quad (2.15)$$

где

$$\Omega_i = \begin{cases} 1, & \text{если } z \in G_i, \\ 0, & \text{если } z \notin G_i, \end{cases}$$

$\Omega_i, i = \overline{1, k}$  – функция принадлежности (соответствия или индикаторная).

Модель в виде (2.15) является достаточно обобщающей и может быть применима для представления целого ряда характеристик функционирования ТП, например, для прогнозирования поврежденности металла при пластической деформации, так на основании работы [22] получим вариант модели следующего вида

$$\omega = \sum_{i=1}^n \Omega_i \int_0^{\Lambda_i} \frac{a\Lambda^{a-1}}{\Lambda_p^a} d\Lambda,$$

где  $\Lambda$  – степень деформации сдвига;  $\Lambda_p = \Lambda_p(\sigma/T; \mu_\sigma; H; \Theta)$  – степень деформации сдвига в момент макроразрушения, зависящая от показателя схемы напряженного состояния  $\sigma/T$ , показателя Лоде  $\mu_\sigma$ , интенсивности скорости деформации  $H$  и температуры  $\Theta$ ;  $a$  – коэффициент, значение которого зависит от физико-химической природы деформируемого металла, термомеханических параметров и характера деформации;  $\Omega_i$  – функция принадлежности к  $i$ -ой области квазимонотонной деформации.

Применим модель вида (2.15) для моделирования изменения геометрических размеров получаемых изделий. В общем виде изменение геометрического размера изделия  $h$  структурно связано с проектным исходным размером инструмента  $h_0$  (зазор между валками, размер канала матрицы и т.п.) и изменениями как инструментального размера  $\Delta h_i(z)$ , так и размера изделия  $\Delta h_j(z)$  в зависимости от изменения состояния системы. Тогда уравнение размерной цепи в общем виде можно записать следующим образом

$$h = h_0 + \sum_{i=1}^n \Omega_i \Delta h_i(z) + \sum_{j=1}^m \Omega_j \Delta h_j(z),$$

где  $\Omega_i$  и  $\Omega_j$  принимают значения 0 или  $\pm 1$  в зависимости от принадлежности к области влияния на уменьшение или увеличение размера. Величины  $\Delta h_i(z)$  и  $\Delta h_j(z)$  являются агрегированными переменными и методика их определения будет рассмотрена ниже.

Основываясь на том, что в условиях высоких требований к точности функционирования ТП, в частности, к точности геометрических размеров, естественно считать все возмущения–факторы малыми отклонениями от номинальных условий обработки и ограничиться линейным приближением. Модель отклонений, например, размеров прессуемых профилей в каждом цикле прессования можно, согласно нашим данным [23], записать в виде (2.15), а именно

$$\Delta y(z, n) = \sum_{i=1}^k \Omega_i \varphi_i(z, n), \quad (2.16)$$

где  $\varphi_1 \equiv \eta_n$  – погрешность, обусловленная факторами с последствием, влияние которых проявляется в последующих  $n+1$  циклах обработки;  $\varphi_2 \equiv \omega_n$  – случайная погрешность, порождаемая факторами без последствия, так называемый “белый шум”;  $\varphi_3 \equiv \eta_{nm} = \sum_{j=0}^m \beta_n \eta_{n-j}$  – величина погрешности при “затухании” последствия, а  $m$  – “память” системы, характеризующая затухания последствия;  $\varphi_4 \equiv F(n)$  – систематическая погрешность, например,

износ;  $\Omega_i$  служит индикатором необходимости включения данного вида погрешности, причем  $\Omega_1 = \Omega_3$ . В данном представлении модель (2.16) характеризует процессы, называемые процессами авторегрессии  $k$ -го порядка и скользящего среднего  $m$ -го порядка и применима для расчета погрешностей обработки для различных циклических процессов (прессование, штамповка).

Систематическая составляющая изменения размеров при износе или смятии элементов инструмента может быть представлена в следующем виде

$$F(g) = \sum_{j=0}^m \Omega_i a_j g^j, \quad (2.17)$$

где  $g$  – параметр, характеризующий время работы инструмента;  $a_j$  – коэффициенты;  $\Omega_i$  – принадлежность к условиям работы инструмента, например, типам применяемых смазок.

Модель (2.17) для износа выходной волоки при волочении биметаллической медно–никелевой проволоки диаметром 0,150 мм при различных условиях работы алмазных волок, построенная нами по экспериментальным данным работы [24], будет иметь следующий вид

$$\Delta d = [\Omega_1(0,27g) + \Omega_2(0,117g) + \Omega_3(0,063g) + \Omega_4(0,049g - 2,029 \cdot 10^{-3} \cdot g^2 + 2,442 \cdot 10^{-5} \cdot g^3)] 10^{-3},$$

где  $\Delta d$  – износ в мм;  $g$  – масса протянутой проволоки в кг;  $\Omega_i$  – принадлежность к следующим условиям работы алмазных волок:  $i=1$  – мыльная эмульсия, одинарная волока;  $i=2$  – масло, одинарная волока;  $i=3$  – масло, “напорная волока”;  $i=4$  – масло, напорная трубка (диаметр канала 0,3 мм). Аналогичный вид имеют и модели при износе штампов, по экспериментальным данным [25] износ формообразующих выталкивателей в зависимости от числа отштампованных поковок  $G$  в тысячах штук можно записать в следующем виде:

- величина смятия  $\Delta_{см} = 0,732G - 0,035G^2$ , мм;
- величина истирания  $\Delta_{ист} = 17,67G - 9,58G^2 + 1,93G^3$ , мм.

### 3. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ В ОМД

#### 3.1. Предмет и теоретические основы вычислительного эксперимента

Компьютерное моделирование как новый метод научных исследований основывается на:

- математических моделях, описывающих изучаемый процесс;
- применении вычислительных машин, обладающих высоким быстродействием (миллионы операций в секунду) и способных вести диалог с человеком.

Исходя из того, что компьютерное моделирование применяется для исследования, оптимизации и проектирования реальных технологических объектов (систем), можно выделить следующие этапы этого процесса (рис. 3.1):

- 1) определение объекта – установление границ, ограничений и измерителей эффективности функционирования объекта;
- 2) формализация объекта (построение модели) – переход от реального объекта к некоторой логической схеме (абстрагирование);
- 3) подготовка данных – отбор данных, необходимых для построения модели, и представление их в соответствующей форме;
- 4) разработка моделирующего алгоритма и программы ЭВМ;
- 5) оценка адекватности – повышение до приемлемого уровня степени уверенности, с которой можно судить относительно корректности выводов о реальном объекте, полученных на основании обращения к модели;
- 6) стратегическое планирование – планирование вычислительного эксперимента, который должен дать необходимую информацию;
- 7) тактическое планирование – определение способа проведения каждой серии испытаний, предусмотренных планом эксперимента;
- 8) экспериментирование – процесс осуществления имитации с целью получения желаемых данных и анализа чувствительности;
- 9) интерпретация – построение выводов по данным, полученным путем имитации;
- 10) реализация – практическое использование модели и результатов моделирования;
- 11) документирование – регистрация хода осуществления процесса и его результатов, а также документирование процесса создания и использования модели.

В представленной на рис. 3.1 схеме организации процесса компьютерного моделирования (имитации) основная цепочка (реальный технологический объект (система) – математическая модель – моделирующий алгоритм – программа ЭВМ – вычислительный эксперимент) соответствует традиционной схеме, но во главу угла теперь ставится понятие триады: модель – алгоритм – программа (блоки 4, 5, 6), стратегическое и тактическое планирование

вычислительного эксперимента (блок 7), интерпретация и документирование его результатов (блок 8).

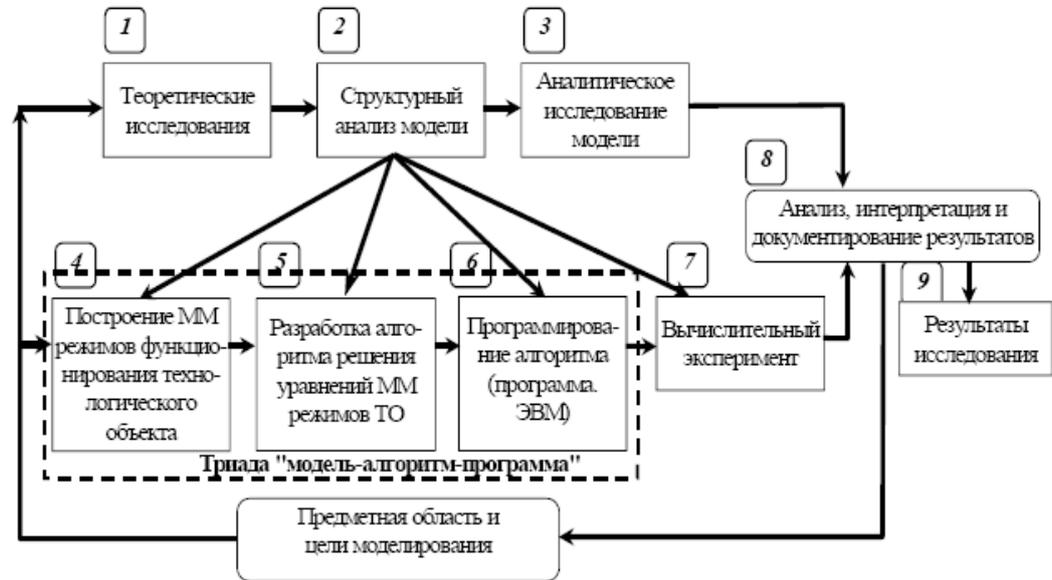


Рис. 3.1. Схема организации компьютерного моделирования

Суть компьютерного моделирования состоит в следующем: на основе математической модели с помощью ЭВМ проводится серия вычислительных экспериментов, т.е. исследуются свойства объектов или процессов, находятся их оптимальные параметры и режимы работы, уточняется модель.

Например, располагая уравнением, описывающим протекание того или иного процесса, можно изменяя его коэффициенты, начальные и граничные условия, исследовать, как при этом будет вести себя объект. Более того, можно спрогнозировать поведение объекта в различных условиях.

Вычислительный эксперимент позволяет заменить дорогостоящий натурный эксперимент расчетами на ЭВМ. Он позволяет в короткие сроки и без значительных материальных затрат осуществить исследование большого числа вариантов проектируемого объекта или процесса для различных режимов его эксплуатации, что значительно сокращает сроки разработки сложных систем и их внедрение в производство.

Компьютерное моделирование и вычислительный эксперимент, как новый метод научного исследования, заставляет совершенствовать математический аппарат, используемый при построении математических моделей, позволяет, используя математические методы, уточнять, усложнять математические модели. Наиболее перспективным для проведения вычислительного эксперимента является его использование для исследования сложного комплекса явлений, характерных для пластической деформации металлов и сплавов – распределение скоростей, деформаций, температур, напряжений.

Кроме того, вычислительный эксперимент позволяет на виртуальном объекте промоделировать различные технологические процессы и особенности их функционирования.

В некоторых процессах, где проведение натуральных экспериментов требует больших материальных затрат, например, изготовление принципиально нового образца оборудования или проведение натурального эксперимента на действующих технологических линиях вычислительный эксперимент является единственно возможным подходом.

Для проверки адекватности математической модели и реального объекта, процесса или системы результаты исследований на ЭВМ сравниваются с результатами эксперимента на опытном натурном образце. Результаты проверки используются для корректировки математической модели или решается вопрос о применимости построенной математической модели к проектированию либо исследованию заданных объектов, процессов или систем.

Подчеркнем, компьютерное моделирование и вычислительный эксперимент позволяют свести исследование "нематематического" объекта к решению математической задачи. Этим самым открывается возможность использования для его изучения хорошо разработанного математического аппарата в сочетании с мощной вычислительной техникой. На этом основано применение математики и ЭВМ для познания законов реального мира и их использования на практике.

Решая прикладные задачи на ЭВМ путем применения как точных методов решения, так и численных, необходимо помнить, что результаты вычислений носят приближенный характер. Важно только добиться того, чтобы ошибки укладывались в рамки требуемой точности.

Реальные процессы и системы можно исследовать с помощью двух типов математических моделей: аналитических и имитационных.

В аналитических моделях поведение реальных процессов и систем (РПС) задается в виде явных функциональных зависимостей (уравнений линейных или нелинейных, дифференциальных или интегральных, систем этих уравнений). Однако получить эти зависимости удается только для сравнительно простых РПС. Когда явления сложны и многообразны исследователю приходится идти на упрощенные представления сложных РПС. В результате аналитическая модель становится слишком грубым приближением к действительности. Если все же для сложных РПС удастся получить аналитические модели, то зачастую они превращаются в трудно разрешимую проблему. Поэтому исследователь вынужден часто использовать имитационное моделирование [6].

Имитационное моделирование – численный метод проведения на ЭВМ вычислительных экспериментов с математическими моделями, имитирующими поведение реальных объектов, процессов и систем во времени в течение заданного периода. При этом функционирование РПС разбивается на элементарные явления, подсистемы и модули. Функционирование этих эле-

ментарных явлений, подсистем и модулей описывается набором алгоритмов, которые имитируют элементарные явления с сохранением их логической структуры и последовательности протекания во времени.

Имитационное моделирование – это совокупность методов алгоритмизации функционирования объектов исследований, программной реализации алгоритмических описаний, организации, планирования и выполнения на ЭВМ вычислительных экспериментов с математическими моделями, имитирующими функционирование РПС в течении заданного периода.

Под алгоритмизацией функционирования понимается пооперационное описание работы всех ее функциональных подсистем отдельных модулей с уровнем детализации, соответствующем комплексу требований к модели.

"Имитационное моделирование" (ИМ)- это двойной термин. "Имитация" и "моделирование" - это синонимы. Фактически все области науки и техники являются моделями реальных процессов. Чтобы отличить математические модели друг от друга, исследователи стали давать им дополнительные названия. Термин "имитационное моделирование" означает, что мы имеем дело с такими математическими моделями, с помощью которых нельзя заранее вычислить или предсказать поведение системы, а для предсказания поведения системы необходим вычислительный эксперимент (имитация) на математической модели при заданных исходных данных.

Основное достоинство ИМ:

- возможность описания поведения компонент (элементов) процессов или систем на высоком уровне детализации;
- отсутствие ограничений между параметрами ИМ и состоянием внешней среды РПС;
- возможность исследования динамики взаимодействия компонент во времени и пространстве параметров системы;

Эти достоинства обеспечивают имитационному методу широкое распространение.

Рекомендуется использовать имитационное моделирование в следующих случаях:

1. Если не существует законченной постановки задачи исследования и идет процесс познания объекта моделирования. Имитационная модель служит средством изучения явления.
2. Если аналитические методы имеются, но математические процессы сложны и трудоемки, и имитационное моделирование дает более простой способ решения задачи.
3. Когда кроме оценки влияния параметров (переменных) процесса или системы желательно осуществить наблюдение за поведением компонент (элементов) процесса или системы (ПС) в течение определенного периода.
4. Когда имитационное моделирование оказывается единственным способом исследования сложной системы из-за невозможности наблюдения явлений в реальных условиях (реакции термоядерного синтеза, исследования

космического пространства).

5. Когда необходимо контролировать протекание процессов или поведение систем путем замедления или ускорения явлений в ходе имитации.

6. При подготовке специалистов новой техники, когда на имитационных моделях обеспечивается возможность приобретения навыков в эксплуатации новой техники.

7. Когда изучаются новые ситуации в РПС. В этом случае имитация служит для проверки новых стратегий и правил проведения натуральных экспериментов.

8. Когда особое значение имеет последовательность событий в проектируемых ПС и модель используется для предсказания узких мест в функционировании РПС.

Однако ИМ наряду с достоинствами имеет и недостатки:

1. Разработка хорошей ИМ часто обходится дороже создания аналитической модели и требует больших временных затрат.

2. Может оказаться, что ИМ неточна (что бывает часто), и мы не в состоянии измерить степень этой неточности.

3. Зачастую исследователи обращаются к ИМ, не представляя тех трудностей, с которыми они встретятся и совершают при этом ряд ошибок методологического характера.

И тем не менее ИМ является одним из наиболее широко используемых методов при решении задач синтеза и анализа сложных процессов и систем.

Одним из видов имитационного моделирования является статистическое имитационное моделирование, позволяющее воспроизводить на ЭВМ функционирование сложных случайных процессов.

При исследовании сложных систем, подверженных случайным возмущениям используются вероятностные аналитические модели и вероятностные имитационные модели.

В вероятностных аналитических моделях влияние случайных факторов учитывается с помощью задания вероятностных характеристик случайных процессов (законы распределения вероятностей, спектральные плотности или корреляционные функции). При этом построение вероятностных аналитических моделей представляет собой сложную вычислительную задачу. Поэтому вероятностное аналитическое моделирование используют для изучения сравнительно простых систем.

Подмечено, что введение случайных возмущений в имитационные модели не вносит принципиальных усложнений, поэтому исследование сложных случайных процессов проводится в настоящее время, как правило, на имитационных моделях.

В вероятностном имитационном моделировании оперируют не с характеристиками случайных процессов, а с конкретными случайными числовыми значениями параметров ПС. При этом результаты, полученные при воспроизведении на имитационной модели рассматриваемого процесса, являются

случайными реализациями. Поэтому для нахождения объективных и устойчивых характеристик процесса требуется его многократное воспроизведение, с последующей статистической обработкой полученных данных. Именно поэтому исследование сложных процессов и систем, подверженных случайным возмущениям, с помощью имитационного моделирования принято называть статистическим моделированием.

Статистическая модель случайного процесса – это алгоритм, с помощью которого имитируют работу сложной системы, подверженной случайным возмущениям; имитируют взаимодействие элементов системы, носящих вероятностный характер.

При реализации на ЭВМ статистического имитационного моделирования возникает задача получения на ЭВМ случайных числовых последовательностей с заданными вероятностными характеристиками. Численный метод, решающий задачу генерирования последовательности случайных чисел с заданными законами распределения получил название "метод статистических испытаний" или "метод Монте-Карло".

Итак, статистическое моделирование – это способ изучения сложных процессов и систем, подверженных случайным возмущениям, с помощью имитационных моделей.

Этапы методики статистического моделирования:

1. Моделирование на ЭВМ псевдослучайных последовательностей с заданной корреляцией и законом распределения вероятностей (метод Монте-Карло), имитирующих на ЭВМ случайные значения параметров при каждом испытании;

2. Преобразование полученных числовых последовательностей на имитационных математических моделях.

3. Статистическая обработка результатов моделирования.

Алгоритм метода статистических испытаний представлен на 2.13.

Рассмотрение основ теории и различных статистических методов решения технологических задач ОМД дано в работе [26].

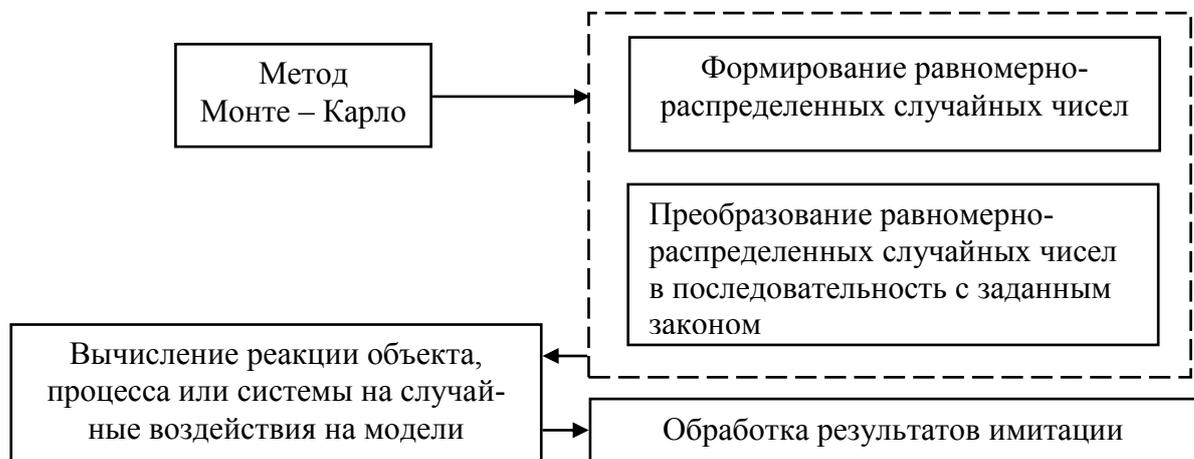


Рис. 2.13. Обобщенный алгоритм метода статистических испытаний

**Пример.** Напряжения трения при горячей осадке полосы с поперечным сечением  $b \times h$  являются статистической функцией, зависящей от колебаний температур нагрева заготовки и инструмента, колебаний механических свойств заготовки и условий на поверхности контакта (смазка, окалина). В этих условиях закон трения можно принять в следующем виде [13]

$$\tau = \psi \tau_T = \left[ \mu + \frac{1}{8} \frac{b}{h} \sqrt{\mu} (1 - \mu) \right] \tau_T, \quad (3.1)$$

где  $\psi$  – детерминированная функция, зависящая от формы очага деформации  $b/h$  и коэффициента трения  $\mu$ ;  $\tau_T$  – случайная величина предела текучести на сдвиг на поверхности заготовки, зависящая от случайной температуры  $\theta$  ( $\tau_T = 1,74 - 0,0118\theta$ ).

Применив к (3.1) операторы образования начальных и центральных моментов функций [26] получим:

– математическое ожидание напряжения трения

$$\langle \tau \rangle = \left[ \mu + \frac{1}{8} \frac{b}{h} \sqrt{\mu} (1 - \mu) \right] \langle \tau_T \rangle;$$

– дисперсию напряжения трения

$$D_\tau = \left[ \mu + \frac{1}{8} \frac{b}{h} \sqrt{\mu} (1 - \mu) \right]^2 D_{\tau_T}.$$

Так при осадке заготовки из стали 45 при  $b/h = 1$ , скорости деформирования  $v_w/h = 0,3 \text{ с}^{-1}$  и  $\theta = 1200^\circ\text{C}$  значения случайной скорости деформации  $\xi_{11}$  колеблются в следующих пределах:  $\xi_{11} = 0,42 \pm 0,08$  (при  $D_{\tau_T} = 1,0 \text{ МПа}^2$ );  $\xi_{11} = 0,42 \pm 0,17$  (при  $D_{\tau_T} = 4,0 \text{ МПа}^2$ ).

Основными параметрами, определяющими меру случайности (стабильность) полей скоростей в процессе осадки полосы, являются форма очага деформации, величина дисперсии предела текучести на сдвиг, реологические свойства, температура обрабатываемого материала и скорость деформирования.

Имитационное моделирование достаточно широко применяется при анализе систем массового обслуживания и надежности систем различного назначения [27].

### 3.2. Обработка экспериментальных данных методом наименьших квадратов

Конечная цель проведения эксперимента - установление функциональной связи (зависимости) между варьируемыми параметрами и выходным параметром и описание этой зависимости математической формулой.

Каждый эксперимент состоит из ряда опытов. В каждом опыте принимаются разные значения исследуемого параметра. Для обеспечения требуемой точности эксперимента в каждом опыте проводится определенное количество повторений или дублей. Например, для обеспечения уровня надежности (доверительной вероятности) 0,9 количество дублей в каждом опыте должно быть не менее 5. Для обеспечения уровня надежности (доверительной вероятности) 0,95 количество повторений должно быть не менее 7.

В основном для обработки экспериментальных данных с применением ЭВМ применяют метод наименьших квадратов (метод Гаусса).

Для понимания сути данного метода рассмотрим сначала рис.3.4. На нем в обычных и логарифмических координатах изображены опытные значения (точки) и, соответственно, аппроксимирующая кривая и аппроксимирующая прямая.

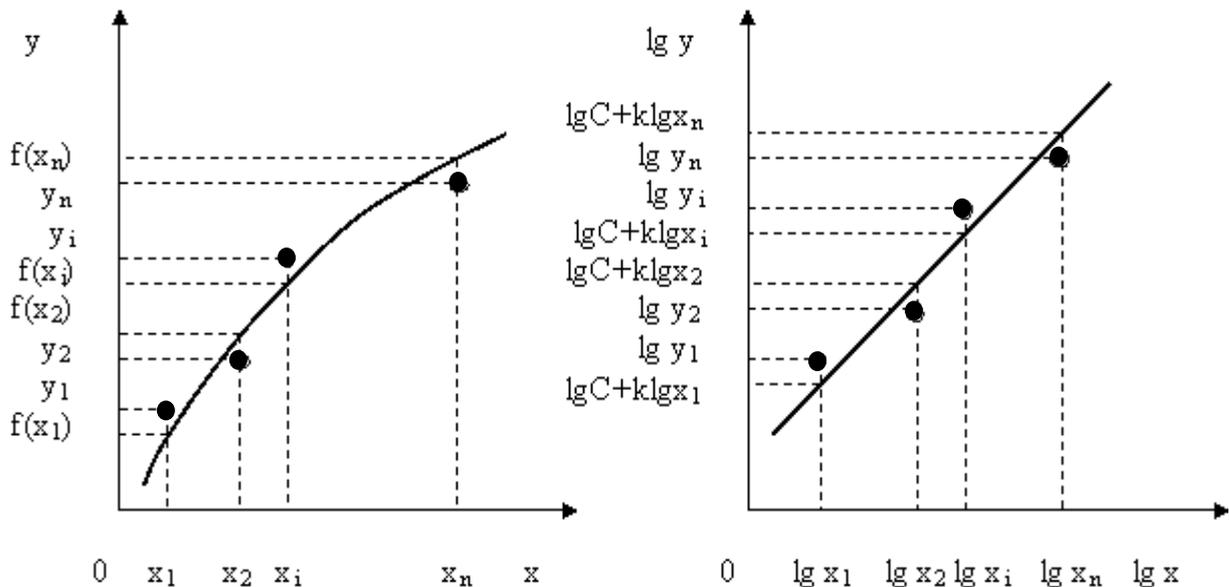


Рис.3.4. Иллюстрация реализации метода наименьших квадратов

На рис. 3.4  $y_1, y_2, \dots, y_n$  – экспериментальные значения,  $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$  – расчетные значения аппроксимирующей функции. Аналогичные значения, но только в логарифмическом измерении, приведены на правой части рисунка.

В основе метода наименьших квадратов лежит следующее положение: наилучшее приближение аппроксимирующей функции  $y = f(x)$  к эксперимен-

тальным данным будет в том случае, когда сумма квадратов отклонений расчетных значений  $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$  от экспериментальных данных  $y_1, y_2 \dots y_n$ , является минимальной [16], т.е.

$$S = \sum_{i=1}^n [y_i - f(x_i)]^2 = \min$$

или

$$S' = \sum_{i=1}^n [\lg y_i - (\lg C + k \lg x_i)]^2 = \min.$$

Разность  $[y_i - f(x_i)]$  в выражении для  $S$  есть отклонение по ординате  $i$  – ой экспериментальной точки от заменяющей (аппроксимирующей) кривой. Квадраты отклонений берутся, чтобы компенсировать знаки «–» отклонений.

Для определенности задачи искомую функцию  $f(x)$  будем выбирать из класса алгебраических многочленов степени  $m$ :

$$P_m(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + a_2 x^{m-2} + \dots + a_{m-1} x^1 + a_m.$$

Назовем данный многочлен – аппроксимирующим многочленом. Аппроксимирующий многочлен не проходит через все узловые точки экспериментальных данных. Поэтому его степень  $m$  не зависит от числа узловых точек  $n$ . При этом всегда  $m < n$ . Степень  $m$  может меняться в пределах  $1 \leq m \leq n-2$ .

Если  $m=1$ , то мы аппроксимируем табличную функцию прямой линией. Такая задача называется линейной регрессией.

Если  $m=2$ , то мы аппроксимируем табличную функцию квадратичной параболой. Такая задача называется квадратичной аппроксимацией.

Если  $m=3$ , то мы аппроксимируем табличную функцию кубической параболой. Такая задача называется кубической аппроксимацией.

Сумма  $S$  будет минимальной, если ее частные производные по параметрам  $a_i$  равны нулю. Аналогично сумма  $S'$  будет минимальной, если ее частные производные по параметрам  $C$  и  $k$  равны нулю. Произведя дифференцирование и соответствующие преобразования, получают систему нормальных уравнений, которая затем решается для нахождения искомой постоянной  $C$  и показателя степени  $k$ . Для обработки экспериментальных данных с целью получения аппроксимирующих функций используют компьютерные программы, реализующие метод наименьших квадратов. В частности программы EXCEL и MATHCAD, применение которых будет рассмотрено на практических занятиях.

Пример. Получены экспериментальные данные зависимости коэффициента напряженного состояния  $n_\sigma$  от фактора формы очага деформации  $l/h_c$  при прокатке высоких полос [28] (таб. 3.1).

Таблица 3.1

Экспериментальные данные зависимости коэффициента напряженного состояния  $n_\sigma$  от фактора формы очага деформации  $l/h_c$  при прокатке высоких полос

$x=l/h_c$	0,18	0,2	0,22	0,25	0,28	0,33	0,4	0,5	0,66	1,0
$y = n_\sigma$	2,01	2,10	1,78	1,81	1,60	1,42	1,50	1,19	1,05	1,03

На рис. 3.5 представлены экспериментальные точки на поле будущего графика в EXCEL, а на рис. 3.6 аппроксимация логарифмической зависимостью  $y = 0,8582 - 0,6498 \ln(x)$ , коэффициент корреляции 0,9. В работе [28] эта зависимость аппроксимирована формулой

$$n_\sigma = 0,75 + 0,25(l/h_c)^{-1}.$$

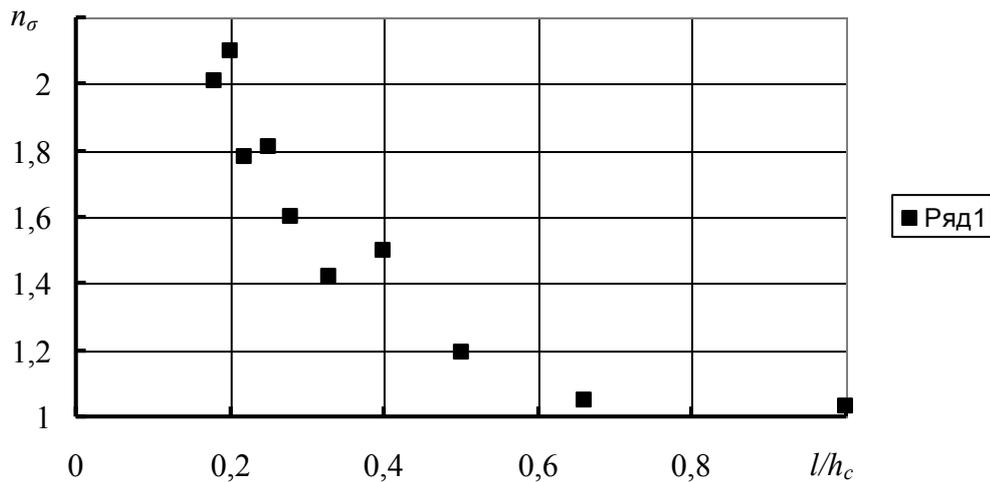


Рис. 3.5. Экспериментальные точки на графике, построенном в EXCEL

Путем изменения параметра  $x=l/h_c$  на  $x=h_c/l$  можно получить из нелинейной зависимости – линейную (таблица 3.2).

Таблица 3.2

Экспериментальные данные зависимости коэффициента напряженного состояния  $n_\sigma$  от фактора формы очага деформации  $h_c/l$  при прокатке высоких полос

$x=h_c/l$	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5	5,0	5,5
$y = n_\sigma$	1,03	1,05	1,19	1,50	1,42	1,60	1,81	1,78	2,10	2,01

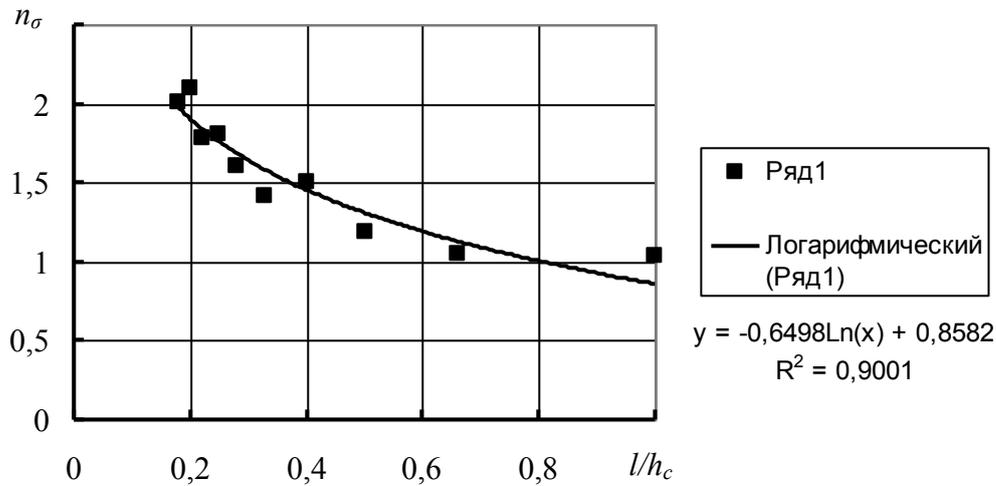


Рис. 3.6. Аппроксимация в EXCEL логарифмической зависимостью  $y = 0,8582 - 0,6498 \lg(x)$

На рис. 3.7 представлена линейная аппроксимация данных табл. 3.2.

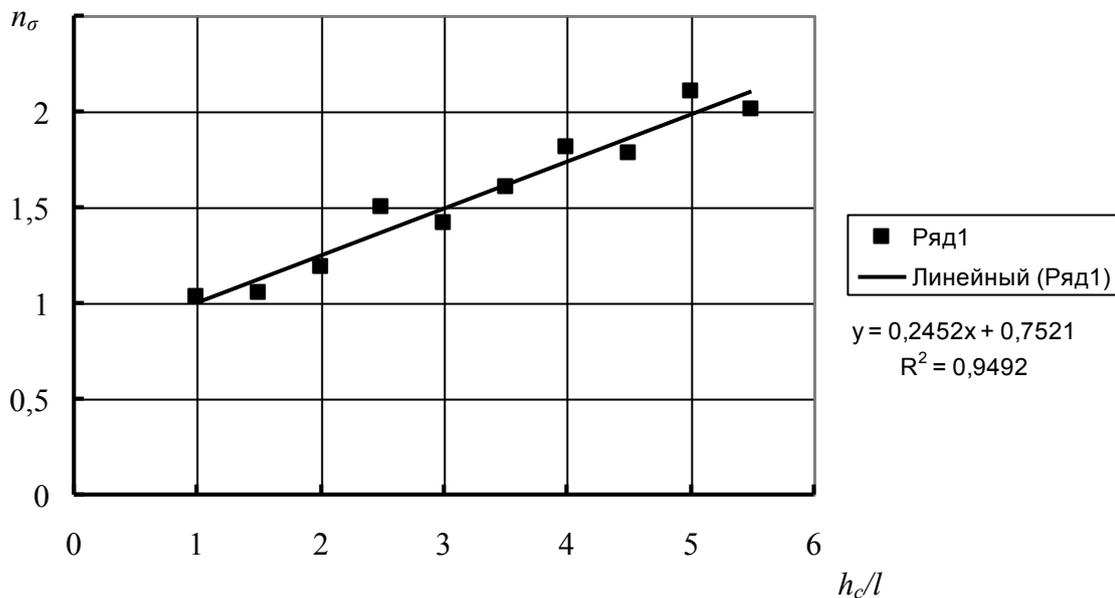


Рис. 3.7. Линейная аппроксимация зависимости коэффициента напряженного состояния  $n_\sigma$  от фактора формы очага деформации  $h_c/l$  при прокатке высоких полос

Данный пример наглядно показывает, как правильный подбор параметров позволяет сделать зависимость линейной. В работе [28] эта зависимость аппроксимирована по методу избранных точек и методу средних (т.е. через две избранные точки) формулой  $n_\sigma = 0,78 + 0,23(h_c/l)$ .

## 4. ПРИМЕНЕНИЕ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ АНАЛИЗА ПРОЦЕССОВ И ОБЪЕКТОВ ОМД

Задачи механики сплошных сред сводятся к дифференциальным уравнениям в частных производных, которые необходимо интегрировать при определенных краевых условиях [12, 13, 16, 17]. Приближенное решение краевых задач во многих случаях удастся получить с применением так называемых прямых методов [29]. Прямыми называются методы приближенного решения задач теории дифференциальных и интегральных уравнений, которые сводят эти задачи к конечным системам алгебраических уравнений. В теории и практике применения прямых методов особое место занимают два метода: метод Рунге и метод Галеркина.

В первом из них задача интегрирования дифференциального уравнения заменяется некоторой равносильной вариационной задачей. Второй основан на ортогонализации невязки операторного уравнения по отношению к координатной системе функций и, вообще говоря, не связан с какой либо вариационной задачей.

Достаточно подробно данные методы и применение их для решения задач ОМД рассмотрены в работах [13, 15, 16, 17, 29].

### 4.1. Проекционные методы решения задач ОМД

#### 4.1.1. Метод Рунге

Пусть требуется найти минимум некоторого функционала  $J(x)$  с областью определения  $D_J$ .

Выберем координатную систему функций  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ , удовлетворяющую следующим требованиям [29]:

- 1) элементы координатной системы, взятые в любом конечном количестве, линейно независимы;
- 2) координатная система полна в некоторой метрике, определенной на области  $D_J$ ;
- 3) при любых значениях постоянных  $a_1, a_2, \dots, a_n$  элемент

$$x_n = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i \quad (4.1)$$

принадлежит  $D_J$  и выражение  $J(x_n)$  имеет смысл.

Рассматривая его как функцию конечного числа переменных  $a_1, a_2, \dots, a_n$ , найдем те значения, при которых  $J(x_n)$  достигает минимума. С этой целью необходимо решить следующую систему уравнений

$$\frac{\partial J(x_n)}{\partial a_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (4.2)$$

(необходимое условие экстремума  $J(x_n)$ ). Убедившись, что найденные значения постоянных  $a_i$  действительно реализуют минимум величины  $J$ , подставим эти значения в выражение (4.1). В результате получим элемент  $x_n$ , который назовем  $n$ -м приближением по Ритцу решения данной вариационной задачи.

Для неоднородных граничных условий можно искать  $n$ -е приближение по Ритцу в следующем виде

$$x_n = \varphi_0 + \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i, \quad (4.3)$$

где элемент  $\varphi_0$  удовлетворяет заданным граничным условиям, а  $\varphi_i$  удовлетворяет соответствующим однородным граничным условиям.

Решение системы уравнений (4.2) является в общем случае весьма сложной задачей. Она существенно упрощается, если  $J(x_n)$  – квадратичный функционал, в этом случае уравнения (4.2) линейны относительно  $a_i$ .

На практике во многих случаях приходится ограничиваться сравнительно небольшим числом членов рядов (4.1) и (4.2), поэтому удачный выбор координатных функций имеет решающее значение. При решении вариационных задач обработки металлов давлением для выбора координатных функций обычно используют результаты экспериментальных исследований.

Пример. Рассмотрим расчет деформированного состояния полосы прямоугольного сечения при кузнечной протяжке (рис. 2.9) при указанных там граничных условиях. Модель построим для поперечного сечения  $yOz$ .

Кривую упрочнения  $T(H)$  аппроксимируем следующей функцией [16]

$$T = 1,88H^{1/3}.$$

Эта зависимость соответствует деформации стали марки 45 при  $1100^\circ\text{C}$ . Функционал для рассматриваемого случая

$$J = \int_{-b-h}^{+b+h} \int_{-b-h}^{+b+h} 1,41H^{4/3} dydz, \quad (4.4)$$

где

$$H = 2\sqrt{\xi_{yy}^2 + \xi_{yz}^2}.$$

Подходящей последовательностью функций вида (4.1) для поля скоростей, удовлетворяющей граничным условиям, будет

$$v_y = a_0 \left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right) \frac{y}{b} + a_1 \left(1 - \frac{z^4}{h^4}\right) \frac{y}{b} + \dots \quad (4.5)$$

Ограничим (4.5) двумя членами ряда. Второй компонент скорости найдем из условия несжимаемости  $\xi_{yy} + \xi_{zz} = 0$  при  $\xi_{xx} = 0$ .

Очевидно, что из выражения (4.5) следует

$$\xi_{yy} = \frac{\partial v_y}{\partial y} = a_0 \left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right) / b + a_1 \left(1 - \frac{z^4}{h^4}\right) / b = -\xi_{zz}.$$

После интегрирования данного выражения для нахождения  $\xi_{zz}$  и преобразований получили компоненты тензора скорости деформации [16]

$$\xi_{yy} = -\xi_{zz} = \left(1 - \frac{z^2}{h^2}\right) \left(\frac{3v}{2h}\right) - a_1 \left(\frac{1}{5} - \frac{6z^2}{5h^2} + \frac{z^4}{h^4}\right) b; \quad (4.6a)$$

$$\xi_{yz} = -3v \frac{yz}{2h^3} - 2a_1 yz \left(\frac{z^2}{h^2} - \frac{3}{5}\right) / bh^2. \quad (4.6b)$$

Деформированное состояние описывается приближенно формулами (4.6), которые содержат один варьируемый коэффициент  $a_1$ , который определим из условия экстремума функционала (4.4)

$$\frac{\partial}{\partial a_1} \left[ \int_{-b-h}^{+b+h} \int 3,56 (\xi_{yy}^2 + \xi_{yz}^2)^{2/3} dydz \right] = 0.$$

В результате найдено  $a_1 = 0,73v$ , подставив которое в (4.6) получим

$$\xi_{yy} = \left(1,36 - 0,62 \frac{z^2}{h^2} - 0,74 \frac{z^4}{h^4}\right) \frac{v}{h},$$

$$\xi_{yz} = - \left(0,62 + 1,46 \frac{z^2}{h^2}\right) \frac{vyz}{bh^2}.$$

Распределение интенсивности скоростей деформации в безразмерном виде  $H^I = H/(2v/h)$  для одной четверти представлено на рис. 4.1 (подготовлено с применением пакета EXCEL).

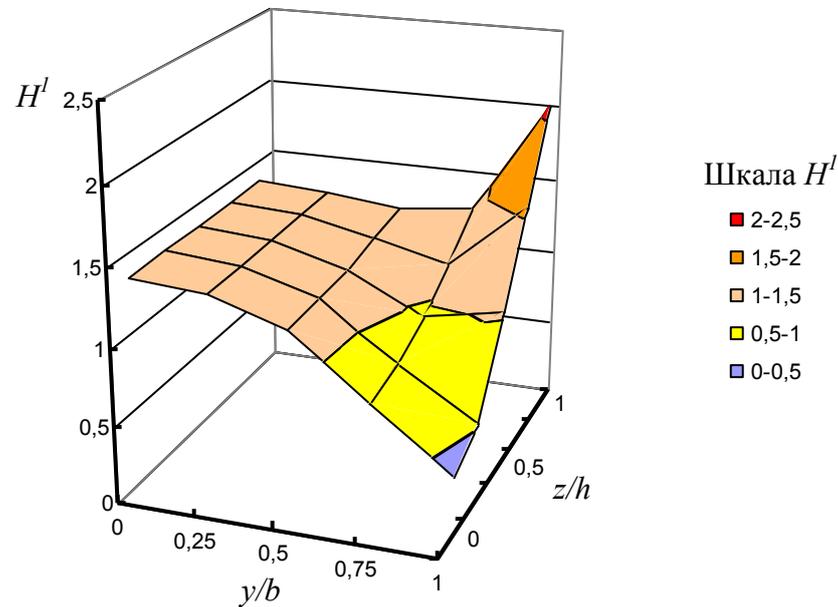


Рис. 4.1. Распределение интенсивностей скорости деформации по сечению заготовки при протяжке

#### 4.1.2. Метод Галеркина

Пусть требуется найти решение уравнения

$$Lx = y^* (y \in D \subset H, y^* \in H).$$

Как и в методе Ритца, выбираем координатную систему функций  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ , удовлетворяющую следующим требованиям [29]:

4) элементы координатной системы, взятые в любом конечном количестве, линейно независимы;

5) координатная система полна в некоторой метрике, определенной на области  $D_L$ ;

6) при любых значениях постоянных  $a_1, a_2, \dots, a_n$  элемент

$$x_n = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i \tag{4.7}$$

принадлежит  $D_L$  и выражение  $Lx_n$  имеет смысл.

Запишем условие ортогональности невязки уравнения  $Lx = y^*$  к первым  $n$  координатным функциям

$$(Lx_n - y^*, \varphi_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Это означает, что выражение  $(Lx_n - y^*)$  «равно нулю» в подпространстве  $H^{(n)}$  с базисом  $\varphi_i, i=1, 2, \dots, n$ , т.е. ортогонально базисным функциям и любому элементу этого подпространства.

В результате получаем систему из  $n$  уравнений для нахождения коэффициентов  $a_1, a_2, \dots, a_n$ . Если оператор  $L$  – линейен, то эта система представляет собой систему линейных алгебраических уравнений относительно  $a_i$ .

Решив полученную систему и подставив коэффициенты  $a_i$  в (4.7), получаем элемент  $x_n$ , который назовем  $n$  – м приближением по Галеркину решения данной задачи.

Методы Рунта и Галеркина широко используются в методе конечных элементов.

## 4.2. Метод конечных элементов

Среди численных методов решения наибольшее распространение получили метод конечных разностей (МКР) и метод конечных элементов (МКЭ). Поскольку для решения связанных краевых задач ОМД в настоящее время широко используется МКЭ и имеются специализированные пакеты программ, то краткое рассмотрение и решение тепловых задач МКР будет рассмотрено на практических занятиях.

### 4.2.1. Понятие о методах конечных элементов

Метод конечных элементов (МКЭ) в настоящее время, пожалуй, самый распространенный в мире численный метод. К его достоинствам относятся:

- возможность счета на неравномерных сетках, в двумерном и трехмерном случаях для областей сложной геометрии;
- "технологичность" методов.

Основная идея метода конечных элементов, базирующая на методах Бубнова, Галеркина и Рунта, была предложена Р.Курантом в 1943 г., но осталась незамеченной, опередив потребности практики. В 50 - х годах прошлого века с появлением первых компьютеров возникла необходимость в разработке новых инженерных подходов к численному решению задач со сложной геометрией, в которых области интегрирования разбивались на подобласти. Такие подобласти (носители финитных базисных функций, об этом ниже) и получили название конечных элементов.

Метод конечных элементов основан на идее аппроксимации непрерывной функции  $\varphi^{(e)}$  (в физической интерпретации - температуры, давления, перемещения, скорости и т.д.) дискретной моделью, которая строится на мно-

жестве кусочно-непрерывных функций, определенных на конечном числе подобластей, называемых конечными элементами [29, 30-32]. Исследуемая геометрическая область разбивается на элементы таким образом, чтобы на каждом из них неизвестная функция аппроксимировалась пробной функцией (как правило, полиномом). Причем эти пробные функции должны удовлетворять граничным условиям непрерывности, совпадающим с граничными условиями, налагаемыми самой задачей. Выбор для каждого элемента аппроксимирующей функции будет определять соответствующий тип элемента.

Будем рассматривать вычислительный алгоритм метода конечных элементов в формулировке, основанной на процедуре минимизации функционала, соответствующего решаемой непрерывной задаче. В результате выполнения указанной процедуры происходит замещение уравнения или системы уравнений в частных производных системой недифференциальных уравнений, имеющих в качестве коэффициентов аппроксимирующие функции, которые фактически являются значениями искомой функции в вершинах разбиения.

При решении задачи с помощью МКЭ необходимо определиться с формой конечного элемента.

Форма конечного элемента – его внешний вид, определяет точность аппроксимации границ исследуемого объекта

В одномерном случае выбор ограничен отрезком прямой. В двумерном случае форма конечного элемента может быть любой, при условии, что с помощью этого конечного элемента можно, с некоторой степенью точности аппроксимации границ, покрыть площадь произвольной формы (без перекрытия элементов). Наиболее простыми элементами для плоского случая являются треугольный и прямоугольный (со сторонами, параллельными осям координат) элементы.

Для трехмерного случая форма элемента должны быть такой, чтобы с его помощью можно было бы покрыть объем произвольной формы, аппроксимировав при этом границы объекта. Наиболее простыми элементами являются тетраэдр и параллелепипед со сторонами, параллельными осям координат. Условие параллельности упрощает вычисление локальных матрицы жесткости вектора нагрузок.

В общем случае алгоритм МКЭ состоит из четырех этапов:

Этап 1. Выделение конечных элементов (разбиение области на конечные элементы).

Этап 2. Определение аппроксимирующей функции для каждого элемента (определение функции элемента). На данном этапе значение непрерывной функции  $\varphi^{(e)}$  в произвольной точке  $e$ -го конечного элемента аппроксимируется полиномом

$$\varphi^{(e)} = A^{(e)}R + A_0, \quad (4.8)$$

где  $A^{(e)}$  – вектор-строка коэффициентов полинома,  $A_0$  – свободный член,  $R=(x,y,z)$  – вектор координат в рассматриваемой точке.

Задача этапа далее заключается в определении неизвестного вектора  $A^{(e)}$  и свободного члена  $A_0$ . Для этого, используя условие непрерывности функции в узлах, коэффициенты полинома выражают через вектор  $\Phi^{(e)}$  узловых значений функции и координаты узлов и, проделав эквивалентные преобразования, получают

$$\varphi^{(e)} = N^{(e)}\Phi^{(e)}, \quad (4.9)$$

где  $N^{(e)}$  – матрица-строка, элементы которой называют функциями формы конечного элемента.

Функции Фомы легко вычисляются через координаты самой точки и координаты узлов элементов.

Этап 3. Объединение конечных элементов в ансамбль. На этом этапе уравнения (4.9), относящиеся к отдельным элементам, объединяются в ансамбль, т.е. в систему алгебраических уравнений

$$\varphi = N\Phi. \quad (4.10)$$

Система (4.10) является моделью искомой непрерывной функции.

Этап 4. Определение вектора узловых значений функции. В общем случае вектор  $\Phi$  в (4.10) вначале неизвестен. Его определение – наиболее сложная процедура в МКЭ.

Оазработано несколько алгоритмов вычисления вектора  $\Phi$ . Один из алгоритмов основан на минимизации функционала, связанного с физическим смыслом решаемой задачи, и состоит из следующих этапов:

Этап 1. Выбор функционала, зависящего для стационарных задач от искомой функции  $\varphi$  и её частных производных  $\dot{\varphi}_x, \dot{\varphi}_y, \dot{\varphi}_z$  по вектору пространственных координат

$$J = \int_V f(\varphi, \dot{\varphi}_x, \dot{\varphi}_y, \dot{\varphi}_z) dV$$

где  $V$  – объем.

Функционал  $J$  представляется суммой соответствующих функционалов, относящихся к отдельным конечным элементам

$$J = \sum_{e=1}^N J^{(e)} = \sum_{e=1}^N \int_{V^{(e)}} f(\varphi^{(e)}, \dot{\varphi}_x, \dot{\varphi}_y, \dot{\varphi}_z) dV \quad (4.11)$$

где  $N$  – число элементов.

Этап 2. Подстановка аппроксимирующего выражения (4.9) в (4.11) и вычисление производных  $\dot{\varphi}_n, \dot{\varphi}_m, \dot{\varphi}_l$  по формулам вида

$$\dot{\varphi}_n = \frac{\partial \varphi^{(e)}}{\partial x} = \frac{\partial N^{(e)}}{\partial x} \Phi^{(e)}.$$

Этап 3. Минимизация по вектору  $\Phi$  функционала  $J$ . Для этого составляются уравнения

$$\frac{\partial J^{(e)}}{\partial \Phi^{(e)}} = 0. \quad (4.12)$$

Суммирование выражений (4.12) по конечным элементам приводит к системе алгебраических уравнений

$$K\Phi = F, \quad (4.13)$$

где  $K$  – матрица коэффициентов – матрица жесткости,  $F$  – вектор нагрузки.

Матрица жесткости и вектор нагрузки представляют математическую модель в МКЭ.

Этап 4. Решение системы (4.13), позволяющее определить неизвестный вектор узловых значений.

Найденные значения вектора  $\Phi$  подставляют в (4.10), после чего значения функции  $\varphi$  легко вычисляются в любой точке заданной области.

Процедуру определения аппроксимирующей функции элементов выполняют один раз для типичного элемента области безотносительно к его топологическому положению в ней.

Представим, что заготовка в состоянии плоской деформации разделена на конечное число треугольных призматических элементов с воображаемыми границами (рис. 4.2). Элементы соединены только в узловых точках (узлах) и силы не могут передаваться через боковую поверхность элементов. Элементы и узлы так пронумерованы, что соседние элементы или узлы имеют близкие номера.

При небольшом перемещении инструмента узлы перемещаются в новые положения. Перемещения узлов считаются неизвестными параметрами, которые предстоит определить при заданных граничных условиях. В двумерной модели неизвестных параметров вдвое больше, чем узлов, поскольку каждому узлу соответствует две компоненты перемещения  $u$  вдоль оси  $x$  и  $v$  вдоль оси  $y$ . Приращения напряжений и деформаций могут быть определены в результате вычисления перемещений.

В качестве примера рассмотрим треугольный элемент  $ijm$  в условиях плоской деформации (рис. 4.3).

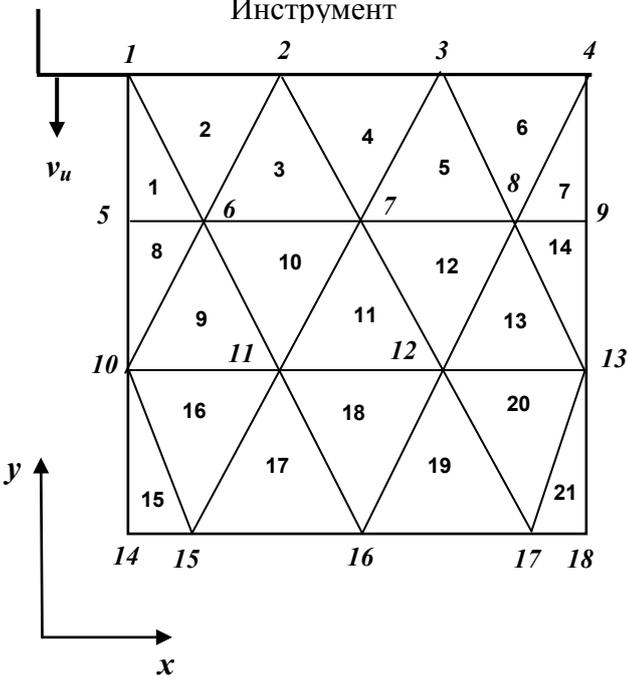


Рис. 4.2. Разбивка на конечные элементы и индексация (намерация) узлов и элементов

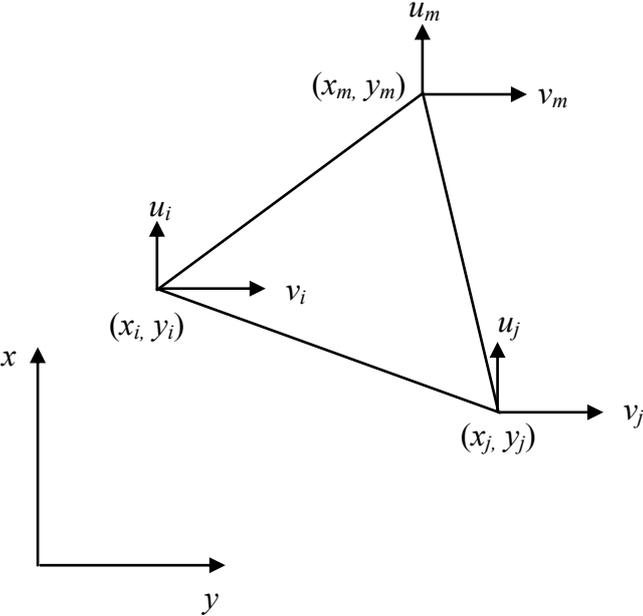


Рис. 4.3. Треугольный элемент с тремя узлами

Компоненты перемещения или скорости элемента интерполируются функцией перемещения. Простейшими функциями перемещения являются линейные полиномы

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y; \quad (4.14a)$$

$$u = \alpha_4 + \alpha_5 x + \alpha_6 y. \quad (4.14б)$$

Коэффициенты  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_6$  определяются путем подстановки в эти уравнения перемещений и координат узловых точек, т.е.

$$u_i = \alpha_1 + \alpha_2 x_i + \alpha_3 y_i, \quad (4.15)$$

$$u_j = \alpha_1 + \alpha_2 x_j + \alpha_3 y_j,$$

$$u_m = \alpha_1 + \alpha_2 x_m + \alpha_3 y_m.$$

Решение этих уравнений позволяет найти

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (a_i u_i + a_j u_j + a_m u_m) / 2A, \\ \alpha_2 &= (b_i u_i + b_j u_j + b_m u_m) / 2A, \\ \alpha_3 &= (c_i u_i + c_j u_j + c_m u_m) / 2A, \end{aligned} \quad (4.16)$$

где  $A$  – площадь треугольника  $ijm$ , т.е

$$A = (x_j y_m + x_m y_i + x_i y_j - x_j y_i - x_i y_m - x_m y_j) / 2,$$

а  $a_i, b_i$  и  $c_i$  определены следующим выражением

$$a_i = x_j y_m - x_m y_j,$$

$$b_i = y_j - y_m,$$

$$c_i = x_m - x_j.$$

Другие коэффициенты получаются путем циклической перестановки индексов. Используя эти значения, уравнения (4.14) можно переписать в терминах скоростей узлов

$$\begin{aligned} u &= \left\{ (a_i + b_i x + c_i y) u_i + (a_j + b_j x + c_j y) u_j + (a_m + b_m x + c_m y) u_m \right\} / 2A, \\ v &= \left\{ (a_i + b_i x + c_i y) v_i + (a_j + b_j x + c_j y) v_j + (a_m + b_m x + c_m y) v_m \right\} / 2A. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Зависимости (4.17) можно представить в следующем виде

$$\begin{aligned} u &= \{ N_i u_i + N_j u_j + N_m u_m \}, \\ v &= \{ N_i v_i + N_j v_j + N_m v_m \}, \end{aligned} \quad (4.18)$$

или в матричном виде

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & N_j & 0 & N_m & 0 \\ 0 & N_i & 0 & N_j & 0 & N_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ u \\ v \\ u \\ v \end{Bmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} N_i &= (a_i + b_i x + c_i y) / 2A, \\ N_j &= (a_j + b_j x + c_j y) / 2A, \\ N_m &= (a_m + b_m x + c_m y) / 2A \end{aligned}$$

называют функциями формы элемента.

Рассмотрим процедуру составления ансамбля конечных элементов. В соответствии с рис. 4.2 начнем с узла 1 и ведем отсчет против часовой стрелки. Соответствие между этими обозначениями и глобальными номерами узлов следующее:

- элемент 1  $i = 1; j = 5; m = 6;$
- элемент 2  $i = 1; j = 6; m = 2;$
- элемент 3  $i = 2; j = 6; m = 7;$
- элемент 4  $i = 2; j = 7; m = 3$  и т.д.

Подставляя полученные значения в (4.18), получим

$$\begin{aligned}
u^{(1)} &= \{N_1 u_1 + N_5 u_5 + N_6 u_6\}, \\
v^{(1)} &= \{N_1 v_1 + N_5 v_5 + N_6 v_6\}, \\
u^{(2)} &= \{N_1 u_1 + N_6 u_6 + N_2 u_2\}, \\
v^{(2)} &= \{N_1 v_1 + N_6 v_6 + N_2 v_2\}, \\
u^{(3)} &= \{N_2 u_2 + N_6 u_6 + N_7 u_7\}, \\
v^{(3)} &= \{N_2 v_2 + N_6 v_6 + N_7 v_7\}, \\
u^{(4)} &= \{N_2 u_2 + N_7 u_7 + N_3 u_3\}, \\
v^{(4)} &= \{N_2 v_2 + N_7 v_7 + N_3 v_3\}.
\end{aligned}$$

Данная система является моделью искомой непрерывной функции.

Матрица жесткости элемента в (4.13) находится из условия баланса работы внешних сил и суммарной внутренней работы [30-32] и имеет вид

$$[k]^e = \int_V [B]^T [D] [B] dV,$$

где  $V$  – объем элемента, а матрица  $B$  определяется через производные от функций (4.17) и имеет вид

$$[B] = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & 0 & b_j & 0 & b_m & 0 \\ 0 & c_i & 0 & c_j & 0 & c_m \\ c_i & b_i & c_j & b_j & c_m & b_m \end{bmatrix}.$$

Матрица  $D$  вытекает из соотношения между напряжениями и деформациями  $\sigma = D\varepsilon$  и при плоском напряженном состоянии для условия пластичности Мизеса имеет вид

$$\begin{aligned}
D &= \frac{E}{(1-\nu)} \begin{bmatrix} 1/(1+\nu) & \nu/(1+\nu) & 0 \\ \nu/(1+\nu) & 1/(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2(1+\nu) \end{bmatrix} - \\
&- \frac{(2G)^2}{\frac{4}{9}\bar{\sigma}^2(3G+H')} \begin{bmatrix} \sigma_x'^2 & \sigma_x' \sigma_y' & \sigma_x' \tau_{xy}' \\ \sigma_x' \sigma_y' & \sigma_y'^2 & \sigma_y' \tau_{xy}' \\ \sigma_x' \tau_{xy}' & \sigma_y' \tau_{xy}' & \tau_{xy}'^2 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

где  $E$  – модуль упругости Юнга,  $\nu$  – коэффициент Пуассона,  $G = E/2(1+\nu)$  – модуль сдвига,  $\sigma'_x, \sigma'_y$  – компоненты девиатора напряжений,  $H'$  – коэффициент упрочнения  $H' = d\sigma_s / d\varepsilon$ ,  $\sigma_s$  – напряжение текучести.

Общая матрица жесткости для ансамбля элементов выразится в виде

$$[K] = \begin{bmatrix} k^{(1)} \\ k^{(2)} \\ \dots \\ k^{(n)} \end{bmatrix}$$

и будет представлять собой симметричную (в силу теоремы Бетти) матрицу. В итоге решение для (4.13) сведется к решению системы уравнений с разреженной (ленточной) матрицей.

Мы рассмотрели только основы теории метода конечных элементов, для более глубокого изучения особенностей применения метода для решения задач ОМД необходимо обратиться к работам [29-32], а также уточнить эти вопросы при практическом освоении пакета ANSYS.

Пример решения одномерной задачи с помощью МКЭ.

Пусть необходимо найти удлинение балки, с одним закрепленным концом (рис. 4.4) с продольной нагружающей силой.

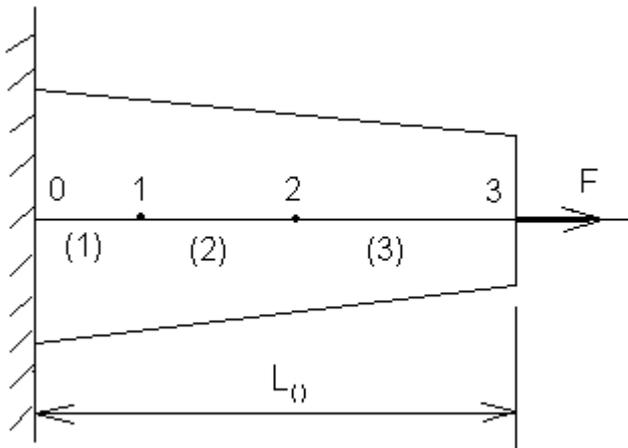


Рис. 4.4. Схема балки с одним закрепленным концом и продольной нагружающей силой

Уравнение, описывающее состояние балки имеет вид:

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{F}{SE} = 0,$$

здесь  $u$  – удлинение,  $F$  – нагружающая сила,  $S$  – площадь поперечного сечения,  $E$  – модуль Юнга.

В соответствии с алгоритмом решения задач с помощью МКЭ:

1. Выбираем конечный элемент. Для одномерной задачи выбор ограничен только отрезком прямой.

2. Выбираем функцию формы конечного элемента, то есть фактически выбираем аппроксимацию решения внутри конечного элемента. Будем считать, что удлинение внутри конечного элемента меняется по линейному закону:

$$y = a_0 + a_1 x. \quad (4.19)$$

Предполагем, что нам известны узловые значения удлинений  $Y_i$  и  $Y_j$  (см. рис. 4.5).

Из (4.19) при  $x = 0$   $Y_i = a_0$ , а при  $x = L$   $Y_j = a_0 + a_1 L$ .

Из данной системы уравнений находим значения  $a_0 = Y_i$  и  $a_1 = \frac{Y_j - Y_i}{L}$  и подставляем в (4.19), выделяя коэффициенты при  $Y_i$  и  $Y_j$ :

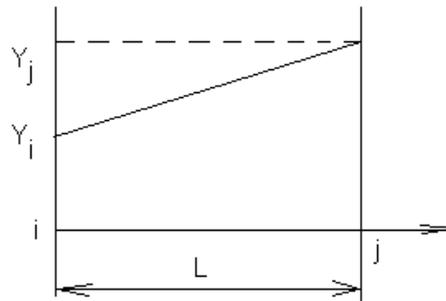


Рис. 4.5. Схема узловых значений удлинений

$$y = \left(1 - \frac{x}{L}\right) Y_i + \frac{x}{L} Y_j = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} Y_i \\ Y_j \end{bmatrix} = N^{(e)} Y,$$

где  $N^{(e)}$  - вектор функции формы конечного элемента, его составляющие элементы - глобальные базисные функции, отличные от нуля в пределах этого элемента.

3. Разбиваем область на конечные элементы.

4. Получение локальной матрицы жесткости и вектора нагрузок конечного элемента.

Локальная матрица жесткости и вектор нагрузок - математическая модель конечного элемента. Эти термины употребляются не только в задачах строительной механики, но и в других предметных областях

Фактически для их получения необходимо применить метод взвешенных невязок в пределах конечного элемента с аппроксимацией, полученной в соответствии с методом Галеркина:

$$\int_0^L N^{(e)} \left( \frac{dy}{dx} - \frac{F}{SE} \right) dx = 0,$$

$$\int_0^L \begin{vmatrix} 1 - \frac{x}{L} \\ \frac{x}{L} \end{vmatrix} \cdot \left( \frac{d}{dx} \left( \begin{vmatrix} 1 - \frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} Y_i \\ Y_j \end{vmatrix} \right) - \frac{F}{SE} \right) dx = 0.$$

Раскрываем интеграл в предположении, что площадь поперечного сечения элемента постоянна:

$$\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} Y_i \\ Y_j \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \frac{FL}{2SE} \\ \frac{FL}{2SE} \end{vmatrix} = 0.$$

Приводим уравнение к следующему виду:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} Y_i \\ Y_j \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -\frac{FL}{SE} \\ \frac{FL}{SE} \end{vmatrix} = 0. \quad (4.20)$$

Получили локальные матрицу жесткости и вектор нагрузок.

5. Ансамблирование.

Интеграл по одному конечному элементу мы вычислили в (4.20).

Глобальная матрица жесткости будет иметь размерность, определяемую числом узлов сетки, в нашем примере – 4. Вектор неизвестных составляют перемещения в этих узлах. Локальная матрица жесткости каждого конечного элемента даст аддитивный вклад в глобальную матрицу в соответствии с узлами подключения конечного элемента (это же касается и вектора нагрузок)

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} Y_0 \\ Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -\frac{FL_1}{S_1E} \\ \frac{FL_1}{S_1E} - \frac{FL_2}{S_2E} \\ \frac{FL_2}{S_2E} - \frac{FL_3}{S_3E} \\ \frac{FL_3}{S_3E} \end{vmatrix} = 0.$$

6. Учет граничных условий. В нашем примере  $Y_0 = 0$ , то есть можно вычеркнуть первый столбец и первую строку.

7. Решение системы уравнений

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \frac{FL_1}{S_1E} - \frac{FL_2}{S_2E} \\ \frac{FL_2}{S_2E} - \frac{FL_3}{S_3E} \\ \frac{FL_3}{S_3E} \end{vmatrix} = 0.$$

В результате найдем удлинение в каждом узле.

### 4.3. Стандартные пакеты прикладных программ для решения задач моделирования процессов и объектов ОМД

#### 4.3.1. Краткий обзор универсального математического процессора Mathcad

Загрузка программы производится через основное меню Windows.

Пуск - Программы - MathSoft Apps - Mathcad 11 Enterprise Edition.

Отличительной особенностью программы Mathcad является возможность описания решаемой задачи в виде, близком к обычной математической записи. Программа не только выполняет вычисления по введенным формулам, решает уравнения различных типов, позволяет легко строить разнообразные графики, но и выполняет преобразования в символическом виде. Встроенные возможности форматирования текста предоставляют средства для оформления документа в стиле программы MS Word.

Для формирования компонентов документа служат панели инструментов. Основной является панель **Математика**, из которой можно открыть панели **Калькулятор 1**, создания графиков **Графики 2**, работы с матрицей **Матрица 3**, записи выражений **Вычисление 4**, вычислений **Исчисление 5**, формирования логических выражений **Булевы 6**, программирования **Программирование 7**, ввода греческих букв **Греческие 8** и символьных операций **Символика 9** (рис. 4.6).

Если в окне программы нет панели **Математика**, то ее можно открыть через пункт основного меню системы **Вид**:

**Вид – Панели – Математика.**

Документ программы **Mathcad** состоит из текстовых блоков, блоков, содержащих математические выражения (вычислительные) и блоков графиков. Типы блоков определяются автоматически или автором документа.

Определить новый блок как текстовый можно, начав набор символов с кавычки. Если блок содержит русские буквы, но они отображаются неверно (неправильно настроена кодовая страница Windows), то требуется выбрать

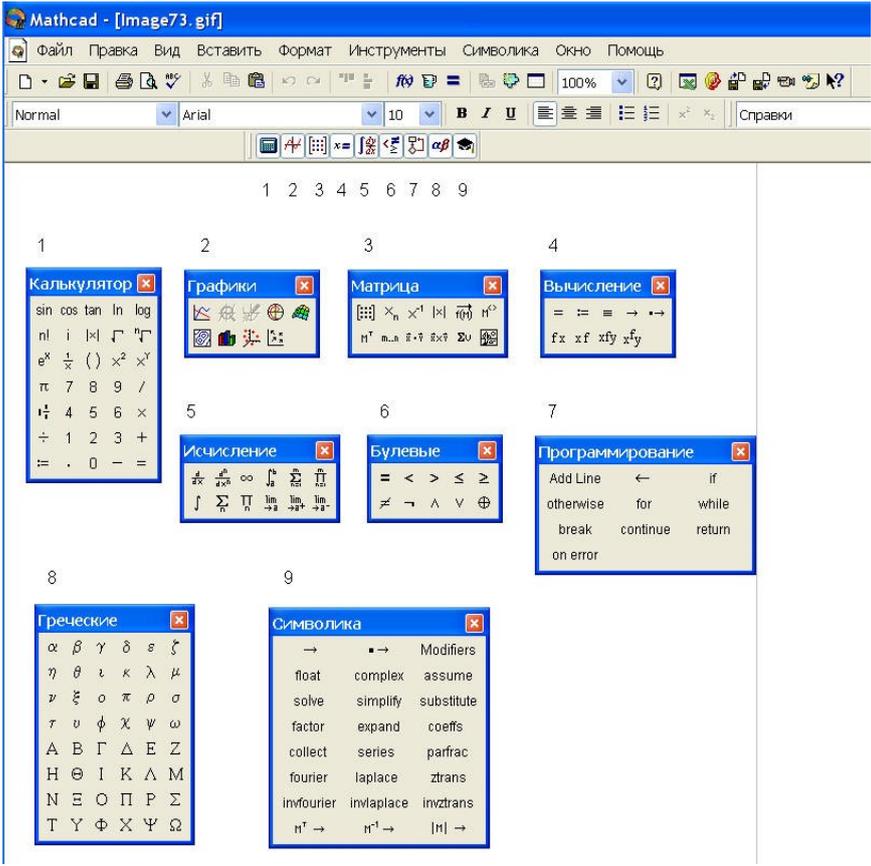


Рис. 4.6.

шрифт с кириллицей (Arial Cyr, Courier New Cyr или Times New Roman Cyr). Вычислительные блоки выполняются строго **сверху вниз**, а в одном уровне – **слева направо**.

Задание числовых значений переменных, выражений для функций или переменных выполняется с помощью операции присваивания " := ". Для вывода значения определенной ранее или вычисленной переменной производится нажатием символа " = ". Символические преобразования задаются символом "  $\square$  " (рис. 4.7).

Возможно использование переменных с нижними (подстрочными) индексами двух типов:

- обычные текстовые, вводятся после имени переменной нажатием точки;

- индексы, вводимые нажатием кнопки  $X_n$  на панели инструментов **Матрица**, задают элементы матриц;

MathCad – богатый программный пакет для решения математических задач, который дает широкий выбор инструментальных средств и поддерживает ряд методов визуализации и анализа. Даже опытные пользователи MathCad постоянно обнаруживают новые возможности его использования.

Mathcad - [Пример простых вычислений.mcd]

Файл Правка Вид Вставить Формат Инструменты Символика Окно Помощь

Normal Arial 10 B I U

Пример выполнения простейших расчетов

ORIGIN = 0 ORIGIN := 1

Исходные данные:

$m := 5$        $x := \begin{pmatrix} 23.5 \\ 24.1 \\ 22.9 \\ 23.0 \\ 24.1 \end{pmatrix}$

Вычисление математического ожидания и стандарта:

$m_x := \frac{1}{m} \cdot \sum_{i=1}^m x_i$        $m_x = 23.52$

$\sigma := \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^m (x_i - m_x)^2}{m - 1}}$        $\sigma = 0.576$

Выполнение аналитических преобразований и вывод графика

$f(x) := 2x$        $\int f(x) dx \rightarrow x^2$

**Греческие**

$\alpha$	$\beta$	$\gamma$	$\delta$	$\epsilon$	$\zeta$
$\eta$	$\theta$	$\iota$	$\kappa$	$\lambda$	$\mu$
$\nu$	$\xi$	$\omicron$	$\pi$	$\rho$	$\sigma$
$\tau$	$\upsilon$	$\phi$	$\chi$	$\psi$	$\omega$
A	B	Г	Δ	E	Z
H	Θ	I	K	Λ	M
N	Ξ	O	Π	P	Σ
T	Υ	Ф	X	Ψ	Ω

**Матрица**

$\begin{bmatrix} x_n & x^1 & | & x & n^2 \\ m & n & & & \end{bmatrix}$

**Исчисление**

$\frac{d}{dx}$   $\frac{d^2}{dx^2}$   $\infty$   $\int$   $\sum$   $\prod$

**Калькулятор**

sin cos tan ln log  
n! i |x|  $\Gamma$   $\Gamma$   
 $e^x$   $\frac{1}{x}$  ( )  $x^2$   $x^y$   
 $\pi$  7 8 9 /  
1/4 4 5 6  $\times$   
÷ 1 2 3 +  
:= . 0 - =

Рис. 4.7

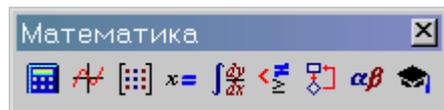
Для ознакомления здесь приведен краткий обзор особенностей MathCad. Это позволит ориентироваться в его прикладном использовании. В данном приложении рассматривается работа, в основном, в русифицированной версии. Аналоги команд нерусифицированной версии указаны в скобках.

### Окно MathCad. Главное меню. Панели.

Окно MathCad - путь к математическим, графическим и символьным функциям, которые обеспечивают обработку, редактирование и управление Вашим "рабочим листом". Нажмите мышью на кнопку "Математика" ("Math"), чтобы увидеть массив доступных Вам вычислительных функциональных возможностей.

Файл Плавка Вид Вставка Формат Математика Символы Окно ? – Главное меню

### Палитра "Математика" (Math Palette)



Отобразить палитру "Математика" можно, выбрав из главного меню команду Вид \ Математика (View \ Math Palette).

Эта палитра открывает палитры математических операторов. Если установить курсор мыши над каждой из кнопок, Вы будете видеть сообщение о том, какую палитру каждая кнопка вызывает:

 Арифметическая палитра.

 Палитра графиков.

 Палитра операций с векторами и матрицами.

 Палитра некоторых знаков.

 Палитра операторов суммирования, дифференцирования и интегрирования.

 Палитра логических (булевых) операций

 Палитра программирования.

 Палитра греческого алфавита.

 Палитра символьных  
Вычислений.

### Панель инструментов



...обеспечивает быстрое выполнение многих общих задач, в открытом "рабочем листе". Подсказки напомнят вам о функциях каждой из кнопок.

Одна полезная кнопка:  запускает Центр Ресурса, который содержит QuickSheets (шпаргалки), которые поясняют много общих математических задач, от построения графиков до анализа данных, а также содержат много обширных таблиц, ссылок и другой полезной информации.

### Панель форматирования текста



Эта панель позволяет редактировать атрибуты текста.

### Строка состояния



...внизу окна MathCad выдаёт советы (предупреждения и другую полезную информацию). Здесь отражено состояние вычислений Вашего "рабочего листа" - "АВТО", оно говорит о том, что "рабочий лист" находится в автоматическом режиме. Это означает, что MathCad автоматически повторно вычислит любые математические выражения, если Вы произведете редактирование формул.

Другая информация, которая появляется на линии сообщения о состоянии клавиатуры или клавиши Num Lock, клавиатуре, а также о номере страницы текущего "рабочего листа".

### Вычисления в MathCad.

Основа MathCad - полноэкранный числовой и символический калькулятор. Это - пустая рабочая область окна, которую Вы видите, когда открываете новый MathCad - документ. Чтобы использовать MathCad как калькулятор, напечатайте выражение, значение которого Вы хотите определить, и затем напечатайте знак равенства, чтобы видеть результат:

$$35 + \frac{7}{13} = 35.538$$

Кнопки палитры вызывают палитры, которые включают большинство математических операций, в которых Вы будете нуждаться, но Вы можете также напечатать имя любой функции или операции непосредственно на клавиатуре. Например, величина радиальной силы в зацеплении косозубых колес:

$$\frac{12 \cdot 10^3 \cdot \tan(20 \cdot \text{deg})}{\cos(8 \cdot \text{deg})} = 4.411 \times 10^3$$

Подпись deg в MathCad играет роль значка градуса угла (от англ. degree), если эта подпись пропущена, угол будет считаться в радианах.

MathCad выполняет действия с матрицами, все сложные математические операции, и по- существу, обеспечивает все математические потребности инженеров и ученых. Вот несколько примеров таких вычислений:

$$\int_0^{\frac{3}{2}} \frac{1}{1+x^2} dx = 0.983$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 7 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0.438 & 0.063 \\ 0.313 & 0.188 \end{pmatrix}$$

### Переменные, функции.

Когда одно и тоже выражение необходимо использовать во многих различных вычислениях, можно определять собственные константы, переменные и функции пользователя, которые используются так же, как и встроенные константы, переменные и функции.

Чтобы ввести подпись у переменной, нужно после ее имени набрать знак "." (точка). Например:  $b_{w1}$  или  $\sigma_{\text{Flimb1}}$ .

Положим, что необходимо определять площадь круга для различных значений радиуса. Можно ввести переменную для радиуса  $r$  и давать ей значения подобно этому:

$$r := 7$$

При определении переменных необходимо использовать знак присвоения :=. Когда Вы запишете формулу площади и напечатаете символ =, Вы получите числовой ответ:

$$\pi \cdot r^2 = 153.938$$

Теперь можно задать другое значение  $r$  и снова произвести вычисления.

Если Вы хотите, чтобы это вычисление области было "автоматическим" в различных частях Вашего "рабочего листа", Вы можете определить функцию для площади круга, подобно этому:

$$\text{area}(r) := \pi r^2$$

Теперь всякий раз, когда будет необходимо найти площадь круга, следует использовать эту функцию.

$$\text{area}(33.27) = 3.477 \times 10^3$$

Можно формировать функции из уже имеющихся. Например, сторона квадрата с той же самой площадью, что и круга радиуса  $r$

$$\text{side}(r) := \sqrt{\text{area}(r)}$$

$$\text{side}(2.2) = 3.899$$

### Решение уравнений.

Выше были рассмотрены вычисления различных выражений. MathCad позволяет решать уравнения и системы уравнений в числовом и символьном виде. Ниже приведён пример вычисления угла наклона зубьев косозубого зубчатого колеса аналитическим способом с помощью решения уравнения:

$$\varepsilon_{\beta} = \frac{b_w \cdot \sin(\beta)}{T \cdot m_n}$$

В уравнении используется знак "=" логического (Булева) равенства. Затем необходимо выделить переменную, относительно которой нужно решить уравнение, в данном примере  $\beta$ , а затем выбрать команду из главного меню: Символы \ Переменная \ Вычислить (Symbolics \ Variable \ Solve). Ниже MathCad выдаст выражение для  $\beta$ :

$$\text{asin}\left(\varepsilon_{\beta} \cdot T \cdot \frac{m_n}{b_w}\right)$$

Можно решить систему нелинейных уравнений численным способом с заданием начальных приближений для переменных, чтобы начать процесс вычислений:

$$x := 1$$

$$y := 1$$

Given

$$x^3 + \sin(y) = 25$$

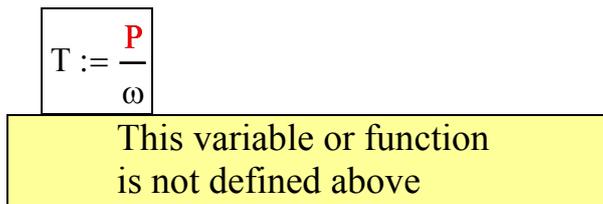
$$y^2 - \cos(x) = 27$$

$$\text{Find}(x, y) = \begin{pmatrix} 2.96 \\ 5.101 \end{pmatrix}$$

### Обратная связь.

MathCad непрерывно отслеживает действия пользователя и выдаёт сообщения об ошибках и неверных действиях. При редактировании математических выражений в строке состояния печатаются советы пользователю и информация. Когда выполняется какая-то операция, которую MathCad не может понять, то проблемная запись выделяется красным цветом.

И если щёлкнуть мышью по выделенному выражению, то появится сообщение об ошибках. Например:



Переменные  $P$  и  $\omega$  не определены, и MathCad сообщает, что не знает, какие значения использовать в вычислении этой формулы.

MathCad производит вычисления в поле экрана слева направо и сверху вниз.

Так:

$$P := 1208$$

$$\omega := 8$$

$$T := \frac{P}{\omega}$$

но не так:

$$T := \frac{P}{\omega}$$

$$P := 1208$$

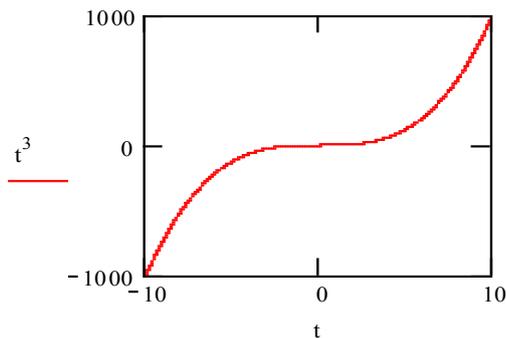
$$\omega := 8$$

### Графика

Выше рассмотрены возможности MathCad как калькулятора и как решающего устройства. Но он также универсальный инструмент визуализации, который поддерживает полный набор графических типов, средства мультимедиа и даже простой обработки изображения.

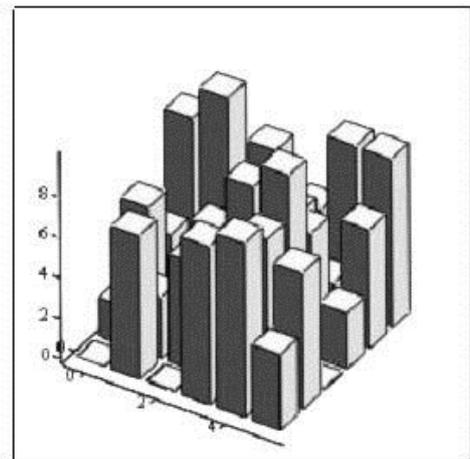
### Графические функции и ввод данных для построения графиков.

Чтобы создать график в MathCad, нажмите кнопку "графика" на панели инструментов, чтобы вызвать графическую палитру, и нажмите верхнюю левую кнопку для "ХУ-графика". На листе появится "заготовка" для графика с незаполненными полями слева и снизу. В левом поле необходимо напечатать функцию, которую Вы хотите изобразить, скажем,  $t^3$ , а в нижнем поле - задать аргумент этой функции ( $t$ ). Как только вы щёлкнете мышью снаружи графика или нажмёте [Enter], появится изображение:



Подобно всем вычислениям, графики сохраняются, и более того, их можно редактировать.

Если имеется ряд табличных данных, то их можно представить графически как трехмерную гистограмму.

$$d := \begin{pmatrix} 0.01 & 1.93 & 5.85 & 3.50 & 8.23 & 1.74 \\ 7.10 & 3.04 & 0.91 & 1.47 & 9.89 & 1.19 \\ 0.09 & 5.32 & 6.02 & 1.66 & 4.51 & 0.57 \\ 7.83 & 5.20 & 8.76 & 9.56 & 5.39 & 4.62 \\ 8.62 & 7.80 & 9.97 & 6.11 & 2.66 & & 8.40 \\ 3.76 & 6.77 & 0.09 & 2.76 & 5.88 & 8.38 \end{pmatrix}$$


d

### Программирование.

MathCad "рабочий лист" – действительно программа, потому что фиксирует последовательность вычислений. Стоит изменить некоторые входные значения или области определения функций и можно использовать одиночный "рабочий лист" для выполнения последовательных вычислений. Эта возможность многократного использования составляет сущность программы. Однако иногда требуется более подробный контроль над сложным алгоритмом, и MathCad дает несколько возможных путей управления сложными вычислениями. Действия, описанные ниже, подробно изложены в руководстве MathCad 2001.

MathCad включает замечательно простой числовой язык программирования. Имеются только несколько базисных циклов и управляющих операторов, но их можно использовать со всеми встроенными функциями и операторами MathCad, и таким образом формировать мощные подпрограммы. Пример, приведенный ниже, иллюстрирует построение программы MathCad. Это простая программа выбора наибольшего числа:

$$\max(a, b) := \begin{cases} a & \text{if } a > b \\ b & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$\max(3, 5) = 5$$

Программы сохраняются, подобно всем выражениям MathCad: измените 3 на 8 или 10, и можно видеть, что программа повторно производит вычисления.

Более глупоко изучить возможности MathCad можно будет на практических занятиях при решении различных задач, в том числе ОМД и оптимизации.

#### 4.3.2. Пакеты программ методов конечных элементов для решения задач ОМД

Целью решения динамических задачи механики деформируемого тела (динамического анализа) является определение реакции деформируемой механической системы на заданное зависящее от времени возмущение. В результате решения задачи требуется определить перемещения, скорости, ускорения элементов этой системы, напряжения и деформации в них, а также производные от них величины. Важным является то, что при решении задачи учитываются силы инерции, а искомые величины ищутся как функции времени.

В простейшем случае уравнение движения, которое решается при динамическом анализе, может быть записано в следующем матричном виде:

$$[M]\{\ddot{u}(t)\} + [B]\{\dot{u}(t)\} + [K]\{u[t]\} = \{F(t)\},$$

где  $[M]$ ,  $[B]$ , и  $[K]$  - матрицы масс, демпфирования и жесткости соответственно;  $u, \dot{u}, \ddot{u}$  - векторы перемещения, скорости, и ускорения;  $t$  - время.

При квазистатическом анализе силами инерции пренебрегают. В простейшем случае уравнение квазистатического анализа имеет следующий вид:

$$[K]\{u[t]\} = \{F(t)\}.$$

При статическом анализе приложенная к системе нагрузка считается стационарной, т.е. не зависящей от времени. В простейшем случае уравнение статического анализа имеет следующий вид:

$$[K]\{u\} = \{F(t)\}.$$

Целью решения связанных задач механики деформированного тела и теплопереноса является определение распределения перемещений, скоро-

стей, ускорений элементов рассматриваемой системы, напряжения и деформации в них, а также температуры, тепловых потоков и производных от них величин как функции времени. Связывание осуществляется посредством:

- влияния температуры на характеристики механических свойств материалов, параметры моделей материалов, моделей накопления поврежденности и критериев разрушения;
- учета в расчете напряженно-деформированного состояния рассматриваемой системы температурного расширения;
- учета в расчете теплопереноса работы пластической деформации.

На сегодняшний день существует большое количество коммерческих и некоммерческих программных продуктов и пользовательских алгоритмов математического моделирования, основанных на различных численных схемах и предлагающих пользователю очень широкий спектр возможностей в вычислениях. Подобные программные продукты принято относить к классу CAE<sup>2</sup> систем. В зависимости от широты круга решаемых задач их принято условно разделять на «тяжелые» универсальные и «узкоспециализированные», ориентированные на узкий круг задач программы.

Математический аппарат для расчета процессов обработки металлов давлением находится на стыке таких дисциплин как МДТТ (механика деформируемого твердого тела) и гидродинамика применительно к вязким веществам. Дело в том, что температурный режим, при котором происходит обработка заготовок находится в очень широком диапазоне – от 20° С до 1200 ° С и иногда может сопровождаться локальными перегревами металла до состояния его расплавления.

В связи с этим обстоятельством, а также учитывая сложность каждой из дисциплин – МДТТ и гидродинамики, можно сказать что построение надежных и точных вычислительных алгоритмов для решения задачи пластического деформирования во всем диапазоне температур это сложная задача даже для современного уровня вычислительной математики и техники. Кроме того, если обратить внимание на существенную деталь моделирование процесса ОМД – перестраивание кристаллической структуры металла под действием температур и давлений, становится очевидным необходимость использования также и полуаналитических методик, которые основаны на большом опыте ОМД. Поэтому знание о вычислительных возможностях современных программных средств попросту необходимо для корректного и адекватного решения сложных задач ОМД.

В настоящий момент существует много пакетов программ, как широко известных так и «закрытых», используемых только внутри производственных компаний, а также тех которые только «зародились» и только развиваются. Общим для всех разработанных методов для решения задач ОМД является

---

<sup>2</sup> CAE- Computer-Aided Engineering system

использование метода конечных элементов (МКЭ). Мы рассмотрим только те, которые доказали свою пригодность для расчета процессов ОМД.

Самым широкоизвестным и популярным пакетом среди различных специалистов является многоцелевой конечно-элементный расчетный комплекс Ansys Multiphysics с подключенным расчетным модулем LS-DYNA. Расчетный комплекс Ansys зародился в 70 годах 20-го века как многофункциональный комплекс физиков-ядерщиков США для расчета мультифизических явлений протекающих в агрегатах энергетических станций. Со временем этот пакет постоянно улучшался новыми возможностями, в частности в области моделирования процессов механики и в настоящее время представляет собой мощнейший универсальный инструмент для расчета и исследования процессов. Но сам Ansys Multiphysics не был бы так универсален без расчетного блока LS-DYNA. Дело в том, что сам Ansys Multiphysics развивался как пакет для расчета процессов протекающих с небольшими скоростями и в которых можно пренебрегать диссипативными процессами (нагреванием металла при его деформации), в которых нет большого формоизменения материала (больших пластических деформаций) и нарушения сплошности материала, а также отсутствует хрупкий характер разрушения материалов. В свою очередь пакет LS-DYNA был создан в недрах национальной Ливерморской лаборатории США для моделирования именно быстропротекающих процессов (вплоть до взрывов) с учетом всего многообразия эффектов протекающих в данных процессах. Следует отметить, что Ansys Multiphysics использует неявную схему интегрирования по времени при численном решении, что обеспечивает устойчивость решения, однако требует слишком больших временных затрат, в LS-DYNA же, используется явная схема интегрирования по времени, что обеспечивает быструю скорость решения при наличии большого числа временных шагов решения. Поэтому, сочетание вышеперечисленных пакетов обладает новым качеством – возможностью расчета процессов ОМД и сопутствующих явлений во всем диапазоне скоростей протекания процессов.

Рассмотрим основные функциональные характеристики пакета программ LS DYNA с подключением к Ansys Multiphysics.

### **Возможности пакетов Ansys и LS-Dyna**

Программный комплекс LS-DYNA успешно используется для разработки технологических процессов при анализе следующих операций ОМД:

#### **1. Объемная формовка:**

- ковка и горячая объемная штамповка;
- холодная объемная штамповка;
- прокатка (продольная, поперечная, винтовая);
- закручивание;
- волочение;
- прессование;
- прошивка;

- выдавливание (экструдирование, экструзия) в том числе прямое, обратное и поперечное;
- выдавливание профилей.

## 2. Листовая штамповка

- вытяжка (с утонением стенки, без утонения стенки, с использованием перетяжных ребер);
- обжим, отбортовка, раздача;
- формовка;
- поэлементная штамповка;
- запрессовка и калибровка трубных деталей;
- разделительные операции (вырубка, пробивка, надрезка, обрезка);
- гибка (свободная, с растяжением, со сжатием, с нагревом, на малый радиус, на большой радиус);
- профилегибка, профилирование в валковых машинах;
- штамповка эластичными средами (резиной и полиуретаном);
- гидроформовка;
- формоизменение в режиме сверхпластичности;
- специальные виды штамповки (штамповка взрывом, электрогидроимпульсная штамповка, магнитно-импульсная обработка)

При анализе всех процессов в LS-DYNA легко учитываются различные особенности, как самих операций, так и обрабатываемых материалов:

- обработка в несколько переходов;
- комбинированное нагружение;
- возможность складко-, гофрообразования, коробления, разрывов, недопустимого утонения при листовой штамповке;
- пружинение и упругое последствие деталей после завершения формоизменения;
- определение рациональной исходной формы плоской заготовки для листовой штамповки;
- анизотропия свойств деформируемых металлов;
- формоизменение труднодеформируемых и малопластичных сплавов;
- формоизменение штамповочных заготовок;
- возможность разрушения заготовки во время формоизменения;
- учёт скорости формоизменения (скоростей деформаций);
- учёт вязкопластических течений;
- связанный тепло-прочностной анализ (расчет распределения температуры по заготовке и инструменту, теплообмена между ними, и связанное влияние температуры на возникающие напряжения).

На основе моделирования в среде LS-DYNA успешно решаются следующие задачи:

- анализ технологических параметров процессов ОМД;
- анализ технологичности деталей;
- выбор параметров кузнечно-прессового оборудования;

- расчет и рекомендации по проектированию инструмента;
- расчет нагрузок в узлах машин обработки давлением;
- анализ напряженно-деформированного состояния ответственных деталей машин.

Для эффективного решения задач динамики системы абсолютно жестких тел (Multi Body Dynamics) LS-DYNA имеет широкие возможности для моделирования шарнирных соединений. Ниже представлен набор шарниров для описания связей между абсолютно жесткими телами:

- сферический (Spherical joint);
- поворотный (Revolute joint);
- цилиндрический (Cylindrical joint);
- плоский (Planar joint);
- универсальный (Universal joint);
- продольный (Translational joint);
- закрытый (Locking joint);
- поворотный (Revolute joint);
- продольный управляемый (Translational Motor joint);
- поворотный управляемый (Revolute Motor joint);
- между двумя шестеренками (Gear joint);
- между рамой и шестеренкой (Rack and Pinion joint);
- ограничивающий угловую скорость (Constant Velocity joint);
- винтовой (Screw joint).

LS-DYNA имеет обширную библиотеку элементов, которые используют как упрощенную, так и полную схему интегрирования. Элементы с упрощенной (одноточечной) схемой интегрирования, используемые в LS-DYNA, просты, эффективны и точны. Исключение деформационных форм с нулевой энергией в таких оболочечных и объемных элементах достигается как введением фиктивной вязкости, так и жесткости. Все элементы векторизованы, а также оптимизированы для использования в SMP<sup>3</sup> и MPP<sup>4</sup> системах. В программе имеется обширная библиотека конечных элементов, которые включают следующие типы – мембраны, тонкие оболочки, толстые оболочки, объемные элементы, балочные элементы, дискретные элементы (пружины, демпферы, масса и др.).

Для моделирования поведения всего многообразия материалов с которыми можно столкнуться при анализе процессов ОМД, в LS-DYNA включены более 130 моделей металлических и неметаллических материалов, многие из которых имеют критерии разрушения. Основные из них приведены ниже:

1. Модели упругих материалов – изотропная, ортотропная, анизотропная, термоупругая, упругая с разрушением, вязкоупругая.

<sup>3</sup> SMP (англ. *Symmetric Multiprocessing*) - Симметричное мультипроцессирование, это архитектура многопроцессорных компьютеров, в которой два или более одинаковых процессоров подключаются к общей памяти.

<sup>4</sup> MPP - параллельное мультипроцессирование, это архитектура многопроцессорных компьютеров, в которых память физически разделена между вычислительными узлами (нодами).

## 2. Модели упруговязкопластических материалов:

- упругопластические с изотропным, кинематическим и комбинированным упрочнением, в том числе с зависимостью свойств от температуры и скорости деформации;
- упругопластические с анизотропным упрочнением (Barlat, Hill);
- упругопластическая модель Стенберга-Гунана (Steinberg-Guinan);
- упругопластическая модель Джонсона-Кука (Johnson-Cook);
- полной пластичности;
- сверхпластичности.

Одной из важнейших отличительных особенностей LS-DYNA является наличие простых в использовании, эффективных и проверенных контактных алгоритмов, включая термомеханический. Используемые в LS-DYNA контактные алгоритмы основаны на методе кинематических связей, методе распределенных параметров и методе штрафа. Более чем двадцатилетний опыт применения этих алгоритмов для решения задач, возникающих в различных областях науки и техники, показал их высокую эффективность.

В настоящее время более 25 различных контактных опций могут быть использованы для описания контакта в LS-DYNA. Главным образом они используются для описания контакта деформирующихся тел, контакта отдельных поверхностей деформируемых тел, контакта абсолютно жесткого и деформирующегося тела или двух абсолютно жестких тел. Для корректного описания трения в месте контакта имеются следующие возможности по описанию трения:

- статическое и динамическое Кулоновское трение;
- вязкое трение;
- трение, зависящее от давления;
- модели трения, определяемые пользователем.

Для решения задачи стационарного и нестационарного теплопереноса LS-DYNA имеет предназначенные для этой цели методы решения – явный, Кранка – Николсона, Галеркина, чисто неявные (прямой с учетом разреженности матриц, итерационный - предопределенных сопряженных градиентов).

Кроме описанных выше свойств LS-DYNA обладает некоторыми удобными функциями, которые необходимо отметить. Среди них выделяются следующие:

- возможность специфицировать вступающие в контакт части конструкции или всю конструкцию целиком графически, т.е. выбирая с помощью мыши или просто задавая соответствующий идентификатор;
- наличие процедуры автоматической и ручной адаптивной перестройки конечно-элементной сетки при вырождении элементов;
- наличие лагранжево-эйлерового алгоритма пространственно-временной дискретизации, позволяющий описывать механическое и тепловое взаимодействие между структурами с разными типами механиче-

ского поведения, например, взаимодействие жидкости или газа с деформируемым твердым телом;

- процедура сглаживания конечно-элементной сетки;
- использование SPH и EFG узловых элементов совместно с традиционными конечными элементами;
- процедура гибкого управления движением и деформациями эйлеровой сетки, которая включает возможность одновременного движения нескольких частей расчетной области по различным законам и возможность изменения этих законов движения в процессе счета;
- наличие алгоритмов связывания для моделирования процесса развития трещин.

Для примера того насколько корректно решаются задачи ОМД с использованием Ansys и LS-Dyna можно показать рассчитанное поле деформаций листа капота автомобиля (рис. 4.8а) и реально изготовленного (рис. 4.8б). Как видно из данных изображений, место дефекта и его характер предсказано достоверно (в красном круге).

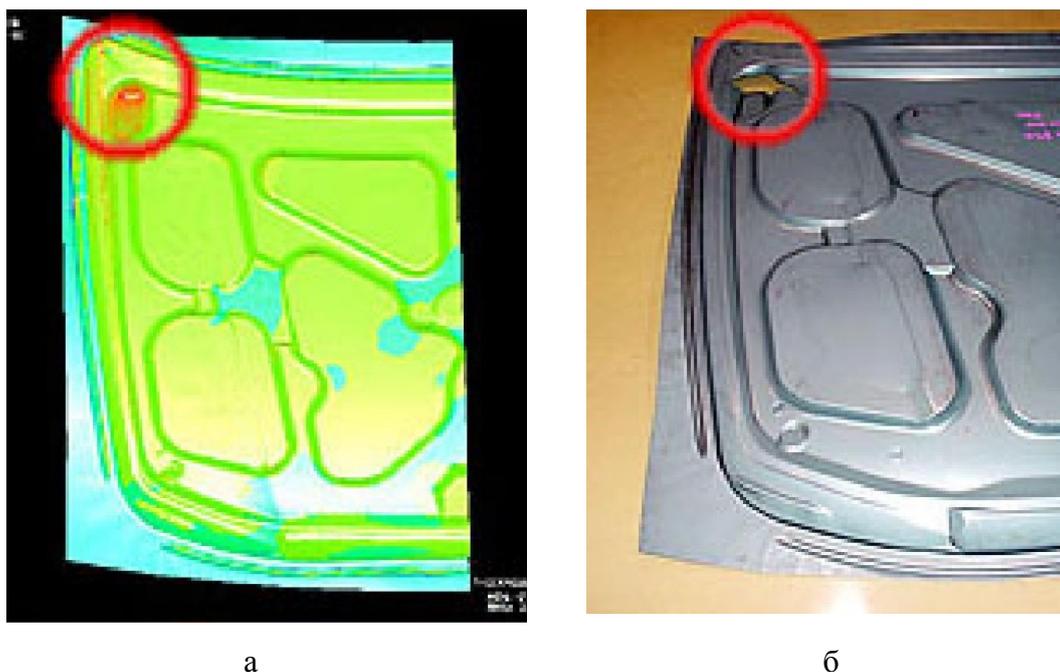


Рис. 4.8. Рассчитанная (а) и реальная деформация (б) листа автомобильного капота с дефектами

### **Возможности программы Deform 3D.**

DEFORM - 3D является системой конечно-элементного моделирования разрабатываемой компанией Scientific Forming Technologies Corporation (SFTC), и предназначена для анализа трехмерного течения металла при различных процессах обработки металлов давлением. Данная система позволяет прогнозировать характер формоизменения с высокой точностью и минимальными затратами на экспериментальные проверки. Ниже перечислены операции которые возможно моделировать в Deform:

- ковка;
- выдавливание;
- протяжка;
- механообработка;
- высадка;
- прессование;
- прокатка;
- вытяжка;
- осадка.

В данной программе есть собственный сеточный построитель, который производит полностью автоматическое разбиение сетки конечных элементов во время моделирования (адаптивное перестроение сетки) и присутствует библиотека оборудования для горячей и холодной штамповки.

Модели материалов используемые в программе могут быть следующих типов: жесткие, пластичные, упруго-пластичные, пористые, упругие.

Конечные элементы и модели материалов позволяют отслеживать места разрушения материалов. Для сложных переходных процессов присутствует возможность задавать параметры многопереходных процессов (рис. 4.9).

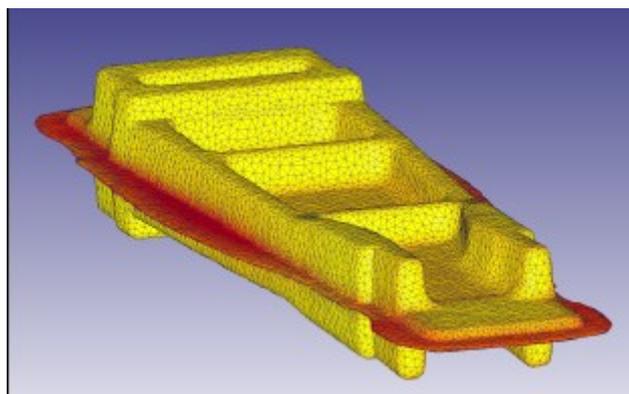


Рис. 4.9. Анализ кованой детали в Deform

Кроме анализа напряжений, деформаций и температур в заготовке и инструменте, в программе предусмотрена возможность определения энергетических и силовых параметров оборудования.

Главным преимуществом системы Deform перед универсальными конечно-элементными пакетами типа Ansys, LS-Dyna или MSC-Marc является ее объектная ориентированность, что позволяет ее легко осваивать специалисту никогда прежде не использовавшему МКЭ в своей практике. Подобная технологическая ориентация данной программы прослеживается во всей структуре программы и позволяет исследователю в области ОМД легко ориентироваться в инструментарии программы благодаря привычным терминам.

Следует отметить, что расчет процессов ОМД может осуществляться не только в специализированных пакетах программ, но и в доступных мате-

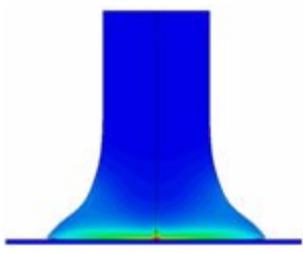
матических пакетах – MathLAB и MathCAD (использование дано в практикуме). При использовании этих пакетов целесообразно производить моделирование процессов, которые описываются аналитически, то есть отработанных методик. Данные пакеты обладают обширным функционалом для автоматизации вычислений и позволяют легко построить аналитическую схему вычисления, например для установившегося процесса прокатки.

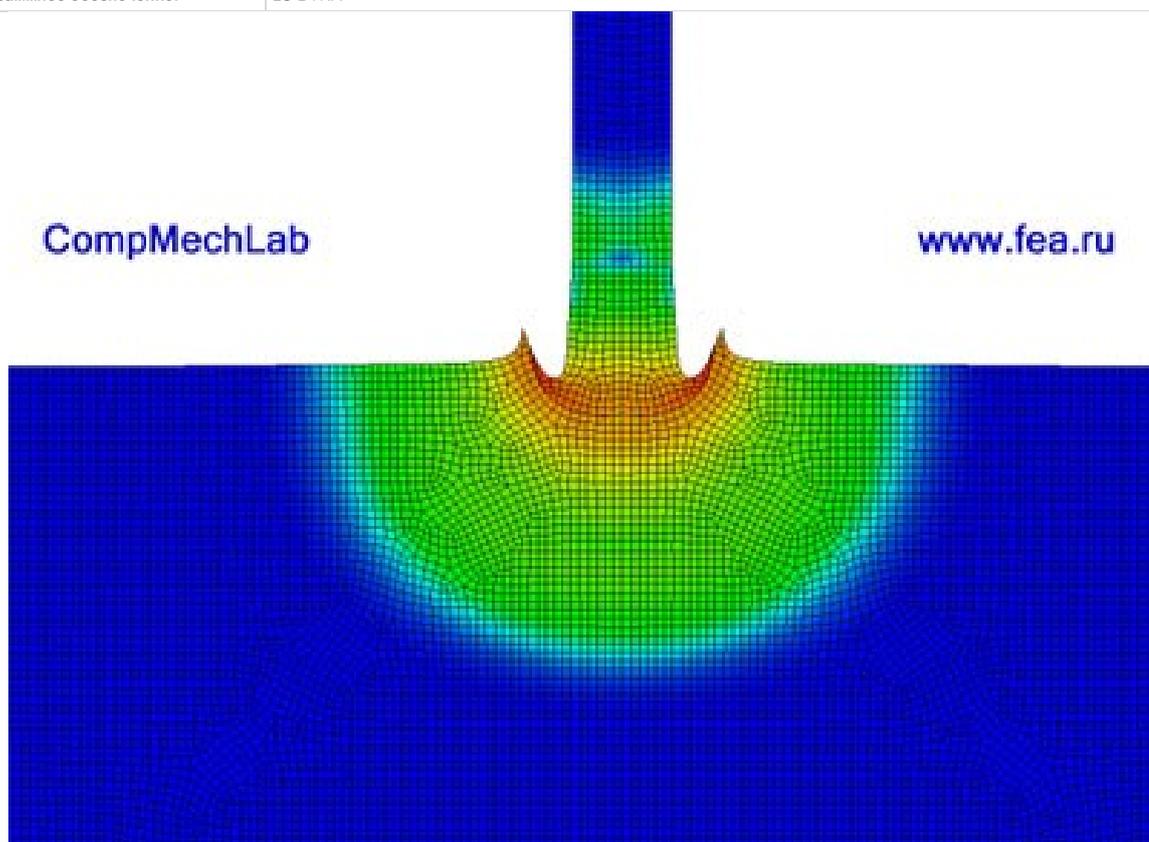
Другим путем разработки сложных численных алгоритмов решения задач ОМД может быть использование специальных средств разработки, таких как Diffpack, который, является профессиональным объектно-ориентированным и проблемно-решающим окружением для численного решения дифференциальных уравнений в частных производных и разработки независимых приложений.

Уникальность программы Diffpack заключается в его возможностях. Данная пакет программ является объектно-ориентированным окружением, работающим под C++, предназначенным для решения дифференциальных уравнений в частных производных. Он представляет собой совокупность текстов программ, написанных на языке C++, и библиотек, что позволяет с минимальными затратами времени создавать консольные приложения или приложения Windows для решения уравнения или системы уравнений в частных производных. В программе реализован новый подход к решению задач математической физики за счет того, что пользователь сам может задавать решаемое уравнение или систему дифференциальных уравнений в частных производных. В программе есть возможность интеграции с существующим программным обеспечением и связь с FORTRAN программами. Для решения дифференциальных уравнений в частных производных в программе предусмотрен широкий выбор методов решения – метод конечных элементов, метод конечных разностей, конечных объемов и их различные модификации с аппроксимациями функций высокого порядка. Для эффективного решения присутствуют алгоритмы адаптивного сгущения сеток, декомпозиции областей, распараллеливания вычислений, многосеточных методов, а также высокоэффективные алгоритмы решения СЛАУ. В программе присутствуют широкие возможности для анализа и обработки данных и отображения результатов вычисления. Предусмотрена поддержка взаимодействия с ANSYS, Abaqus, и другими CAE.

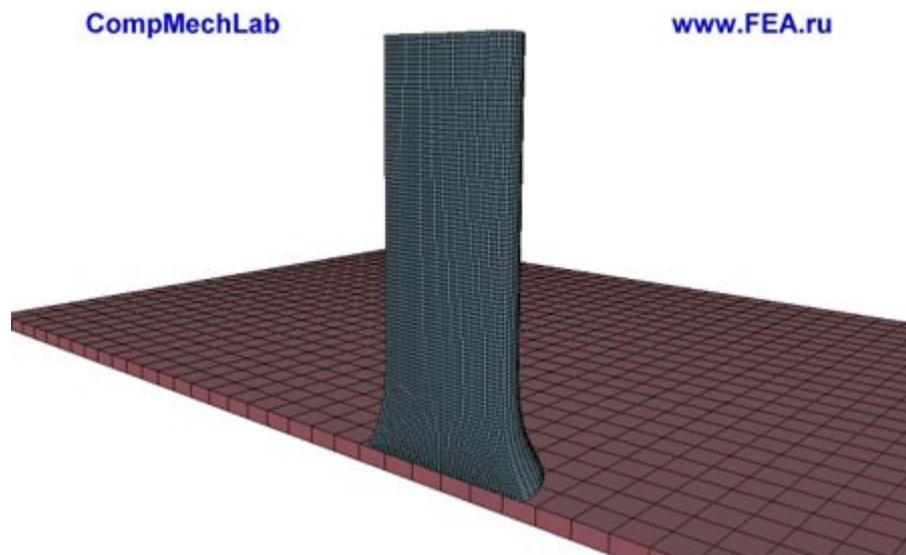
При выполнении практикума предусмотрены работы по освоению пакета ANSYS и LS-DUNA.

Ниже приведены примеры использования МКЭ при решении различных задач [33].

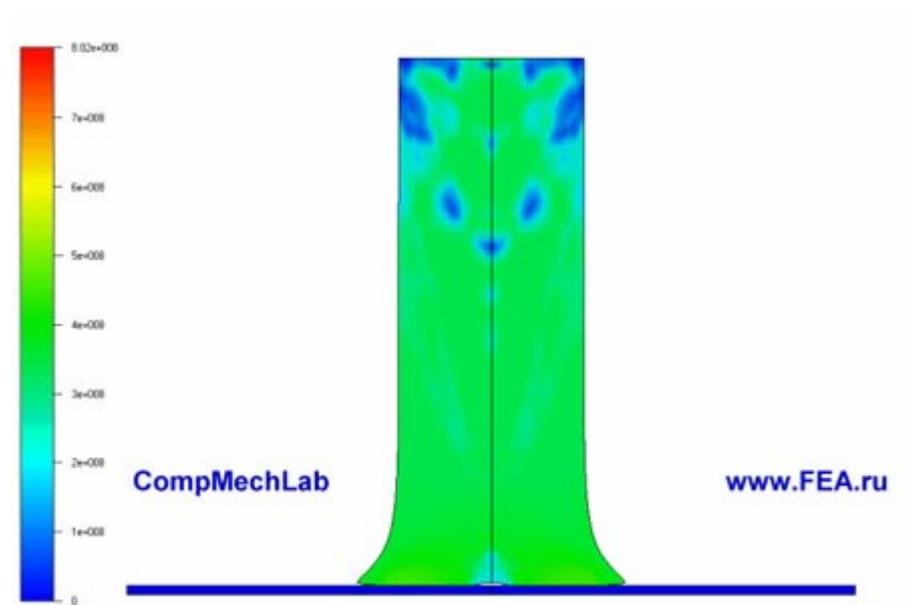
	<p><b>Конечно-элементное исследование удара цилиндра по жесткой преграде. Тест Дж. Тейлора. Рикошет</b></p> <p>Конечно-элементное исследование удара цилиндра по жесткой преграде. Исследование влияния кинематического упрочнения материала, разогрева, обусловленного деформированием цилиндра. Исследование проводилось в 2006 году.</p>
<p><b>Ключевые слова:</b></p>	<p>Удар, рикошет, механика контактного взаимодействия, термо-упруго-пластичность, динамический предел текучести, Эффект Б.М. Малышева, влияние разогрева на характер деформирования</p>
<p><b>Тип элементов/Тип задачи:</b></p>	<p>2D и 3D элементы / Динамическое термо-упруго-пластическое контактное взаимодействие</p>
<p><b>Внешние воздействия:</b></p>	<p>Начальная поступательная скорость цилиндра</p>
<p><b>Программное обеспечение:</b></p>	<p>LS-DYNA</p>



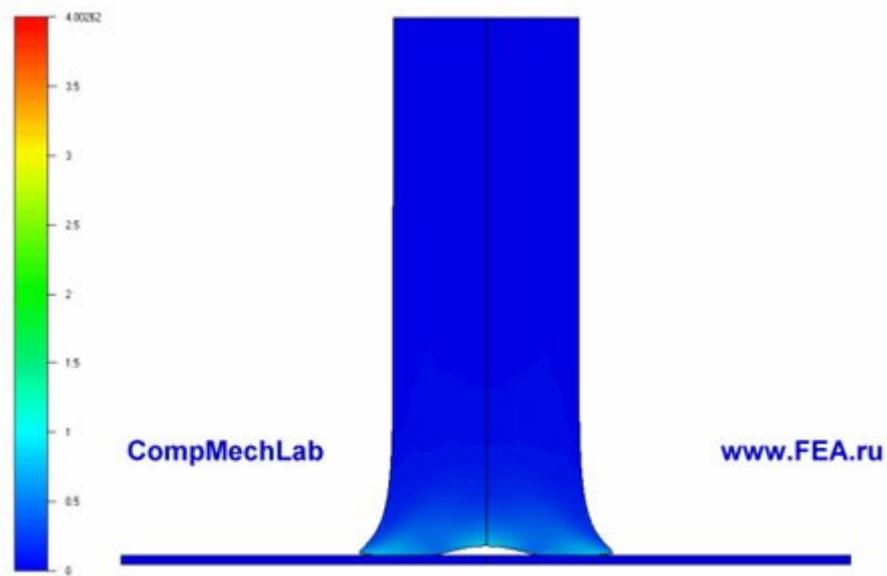
Интенсивность напряжений по Мизесу. КЭ сетка. Фрагмент



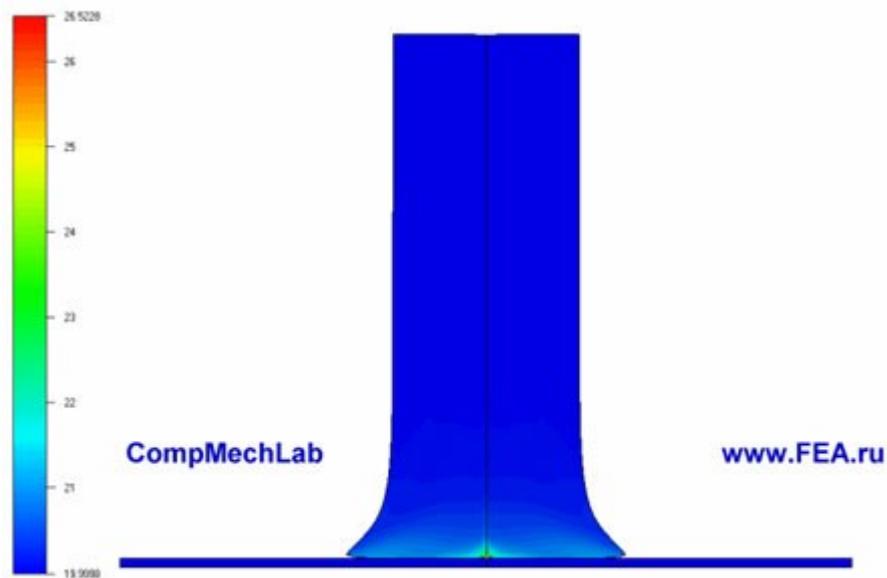
Конечно-элементное исследование удара цилиндра по жесткой преграде.  
Тест Дж. Тейлора. Деформирование



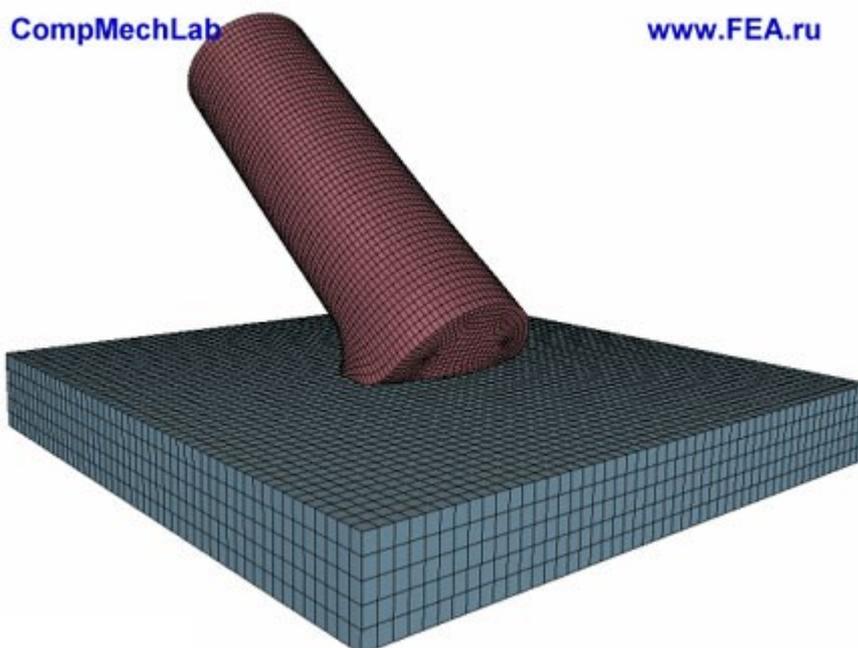
Конечно-элементное исследование удара цилиндра по жесткой преграде.  
Тест Дж. Тейлора. Интенсивность напряжений по Мизесу



Конечно-элементное исследование удара цилиндра по жесткой преграде.  
Тест Дж. Тейлора. Интенсивность пластических деформаций

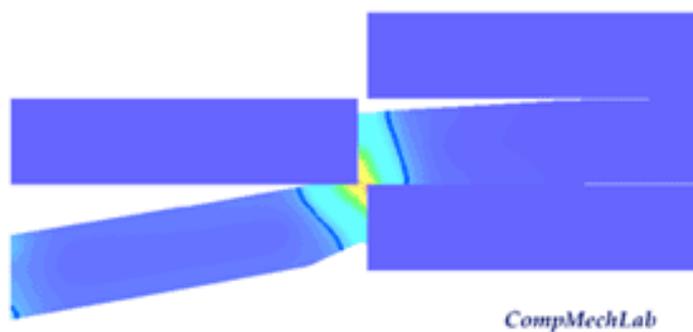


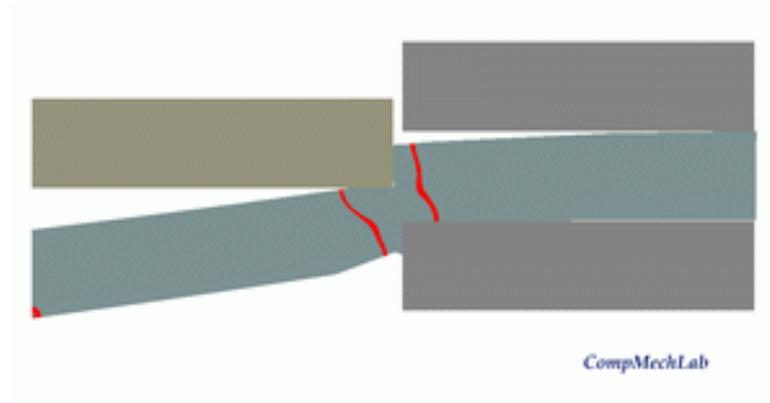
Конечно-элементное исследование удара цилиндра по жесткой преграде.  
Тест Дж. Тейлора. Поле температур



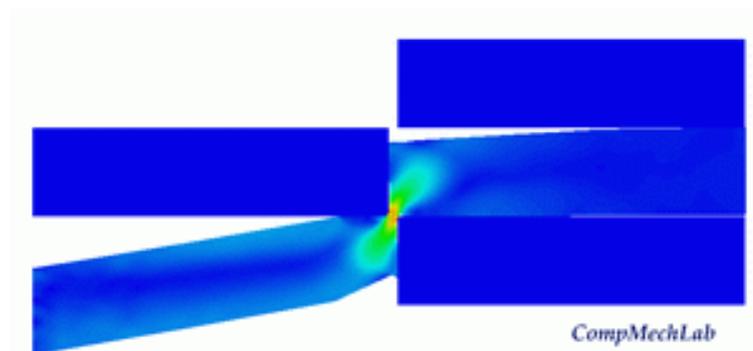
Конечно-элементное исследование удара цилиндра по жесткой преграде.  
Рикошет. Деформирование ударника и мишени в процессе соударения

	<p>Конечно-элементное моделирование процесса вырубki металла</p> <p>Абсолютно жесткий пуансон вырубает цилиндрический элемент из заготовки металла Исследование проводилось в 2005 году.</p>
<p><b>Ключевые слова:</b></p>	<p>Технологическая механика, пластическая обработка металлов, технологическая операция - вырубка цилиндрической шайбы, динамическое контактное взаимодействие, большие упруго-пластические деформации, адаптивное перестроение сетки</p>
<p><b>Тип элементов/Тип задачи:</b></p>	<p>2D элементы, осесимметричная постановка</p>
<p><b>Внешние воздействия:</b></p>	<p>Заданный закон движения пуансона</p>
<p><b>Программное обеспечение:</b></p>	<p>LS-DYNA</p>

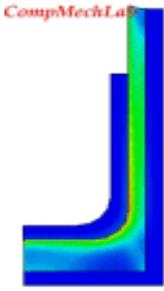




Моделирование процесса вырубki металла. Эквивалентные пластические деформации.



Моделирование процесса вырубki металла. Эквивалентные напряжения.

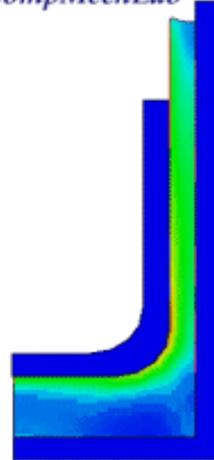
	<p><b>Конечно-элементное моделирование процесса обратной экструзии</b></p> <p>Абсолютно жесткий пуансон вдавливается в термо-упруго-пластическую среду Исследование проводилось в 2003 году.</p>
<p><b>Ключевые слова:</b></p>	<p>Обратная экструзия, связанная задача нестационарной термо-упруго-пластичности, динамическое контактное взаимодействие с учетом трения, большие упруго-пластические деформации, адаптивное перестроение сетки</p>
<p><b>Внешние воздействия:</b></p>	<p>Заданный закон перемещения пуансона</p>
<p><b>Программное обеспечение:</b></p>	<p>LS-DYNA</p>

CompMechLab



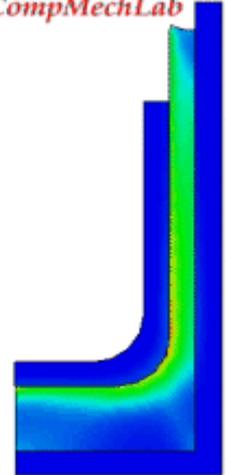
Конечно-элементная модель. Адаптивное перестроение КЭ сетки. Деформированное состояние

CompMechLab

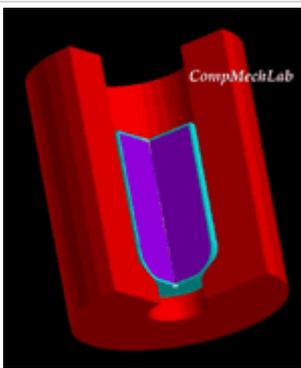


Большие термопластические деформации, возникающие в процессе обратной экструзии

CompMechLab



Нестационарное поле температур, возникающее в процессе обратной экструзии



Моделирование процесса горячей экструзии прессованной титановой стружки в стальной капсуле

Выдавливание горячих титановых брикетов в стальной капсуле через очко матрицы. Исследование проводилось в 2003 году.

Ключевые слова:

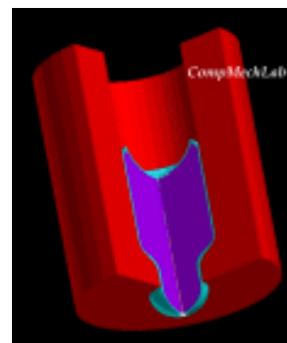
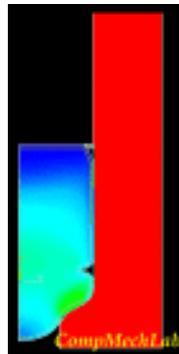
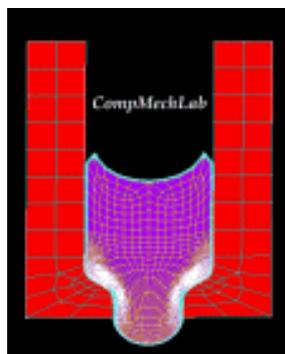
Пластичность, контактное взаимодействие, большие деформации, большие перемещения

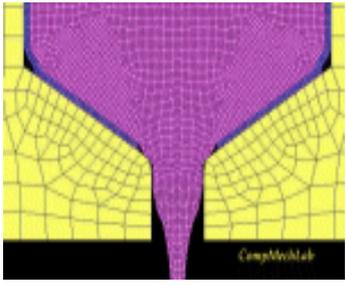
Тип элементов/Тип задачи:

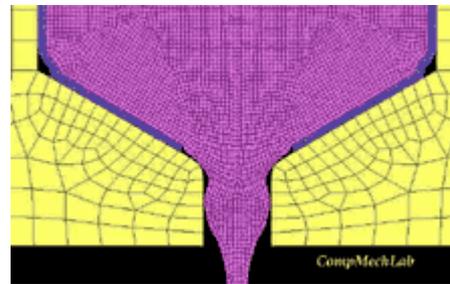
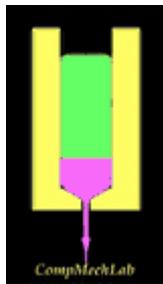
Осесимметричная

Программное обеспечение:

ANSYS



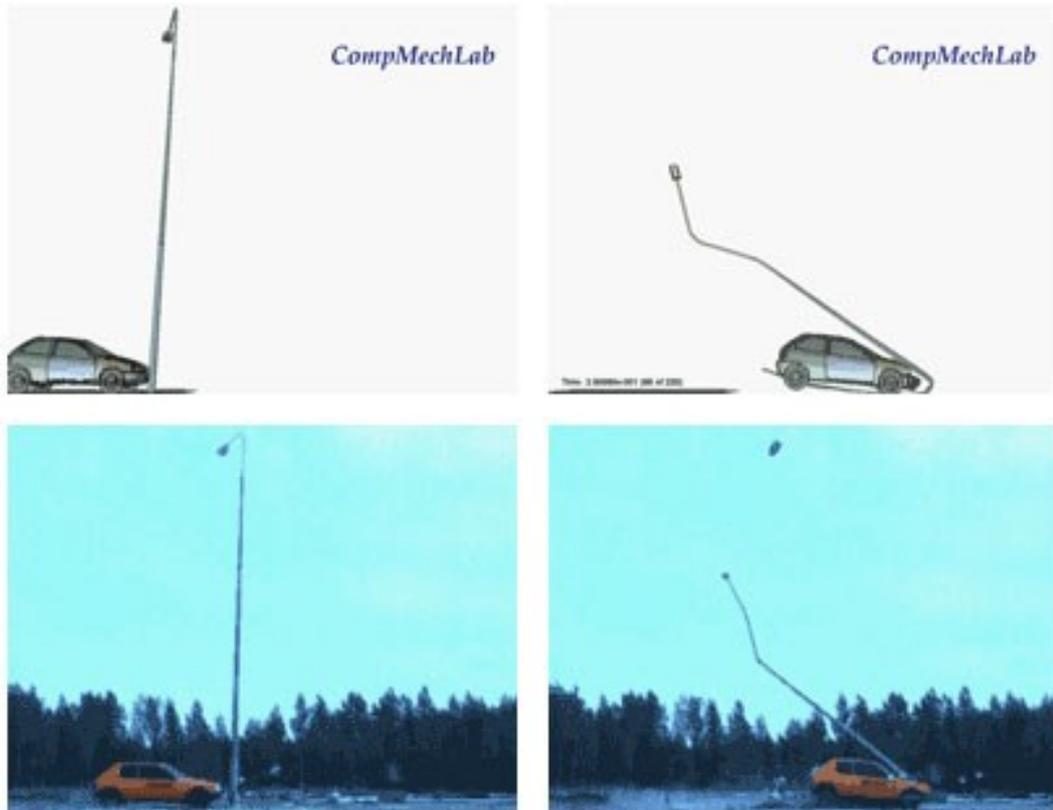
	<p><b>Моделирование процесса горячей экструзии титановых брикетов. LS-DYNA</b></p> <p>Выдавливание горячих титановых брикетов из прессованной стружки в стальной капсуле через матрицу. Используется адаптивно перестраиваемая конечно-элементная сетка. Исследование проводилось в 2003 году.</p>
<p><b>Ключевые слова:</b></p>	<p>Пластичность, большие пластические деформации, большие перемещения, множественное контактное взаимодействие: между капсулой и матрицей, между капсулой и титановым брикетом; множественное разрушение.</p>
<p><b>Тип элементов/Тип задачи:</b></p>	<p>Осесимметричная</p>
<p><b>Внешние воздействия:</b></p>	<p>Давление от пресса</p>
<p><b>Программное обеспечение:</b></p>	<p>LS-DYNA</p>



Моделирование процесса горячей экструзии титановых брикетов. Фрагмент

Моделирование процесса горячей экструзии титановых брикетов

	<p><b>Конечно-элементное моделирование краш-тестов для энергопоглощающих композитных мачт дорожного освещения</b></p> <p>Разработанные пространственные CAD и КЭ модели различных типов композитных мачт позволяют моделировать удар при различной скорости автомобиля, пластическое деформирование армирующих элементов мачт и деталей автомобиля, множественное контактное взаимодействие между объектами с учетом больших деформаций/поворотов/перемещений и динамического разрушения (progressive damage). Исследование проводилось в 2006 году.</p>
<p><b>Ключевые слова:</b></p>	<p>энергопоглощающие мачты дорожного освещения, краш-тесты, верификация конечно-элементных моделей, сравнительный анализ конечно-элементных и экспериментальных результатов</p>
<p><b>Тип элементов/Тип задачи:</b></p>	<p>Контактное взаимодействие, композиты, разрушение</p>
<p><b>Внешние воздействия:</b></p>	<p>Ударное воздействие</p>
<p><b>Программное обеспечение:</b></p>	<p>LS-DYNA</p>
<p><b>Рейтинг:</b></p>	<p>4.93 (Голосов: 15)</p>
<p>Прочтений: 873</p>	



Моделирование краш-теста в LS-DYNA. Сравнение с экспериментом.



Моделирование краш-теста в LS-DYNA. Сравнение с экспериментом

## 5. ПОСТАНОВКА И МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ

### 5.1. Общая постановка задач оптимизации

При проектировании любых технических объектов, технологических процессов и систем всегда решаются задачи выбора и принятия решений.

Задачей принятия решения называют кортеж (совокупность)

$$\Omega = \langle X, O \rangle,$$

где  $X$  – множество вариантов решения задачи;

$O$  – принцип оптимальности, дающий представление о качестве вариантов, в простейшем случае – это правило их предпочтения друг перед другом.

Решением задачи принятия решений называется множество  $X_{\tilde{O}}$ , которое является подмножеством множества  $\tilde{O}$  ( $\tilde{O}_{\tilde{O}} \subset \tilde{O}$ ), полученное на основе принципа оптимальности.

Задачи принятия решений классифицируются по наличию информации об  $X$  и  $O$  и бывают трех видов:

1.  $X$  и  $O$  – неизвестны. Это общая задача принятия решений. Данные для получения  $x_{\text{опт}}$  определяют в данной задаче в процессе ее решения.
2.  $X$  – неизвестно,  $O$  – известно (эта задача поиска вариантов).
3.  $X$  и  $O$  – известны (это задача оптимизации).

В общем случае задача принятия решения решается в два этапа:

**1 этап:** Задача формализуется, т.е. строится ее математическая модель, в которой конкретные физические, технические, технологические, экономические условия и требования к объекту воплощаются в виде задачи оптимизации с определенной целевой функцией и допустимым множеством вариантов.

**2 этап:** Решение задачи оптимизации с использованием известных методов.

Рассмотрим основы теории оптимизации. «Теория оптимизации», с одной стороны, является самостоятельной наукой, а, с другой стороны, составной частью науки под названием «исследование операций».

Операция (в данной науке) – это совокупность взаимосогласованных действий, направленных на достижение вполне определенной цели.

Обязательно должно быть сформулирована цель. Если есть разные пути достижения этой цели, то необходимо найти наилучший из них.

Постановка задачи оптимизации включает в себя множество допустимых решений  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  и числовую функцию  $f$ , определенную на этом множестве, которая называется целевой функцией.

Нельзя отождествлять критерий (критерии) оптимальности и целевую функцию.

Целевая функция – это аналитическая зависимость между критерием (критериями) оптимальности и подлежащими оптимизации параметрами с указанием направления экстремума.

Выбор критериев – сложная задача, т.к. цели при проектировании любого объекта, как правило, противоречивы (обеспечение минимальной стоимости и максимальной надежности, максимальной производительности и минимальной энергоемкости и т.д.).

Если требуется оптимизировать один из показателей качества проектируемого объекта при соблюдении ограничительных требований на остальные показатели, то нужно сформировать один частный критерий. Задача оптимизации при этом сводится к задаче максимизации (минимизации) данного критерия с учетом заданных ограничений.

При наличии нескольких критериев выбирают:

- а) аддитивный критерий, если существенное значение имеют абсолютные значения критериев при выбранном векторе параметров  $X$ ;
- б) мультипликативный критерий, если существенную роль играет изменение абсолютных значений частных критериев при вариации вектора  $X$ ;
- в) максиминный (минимаксный) критерий, если стоит задача достижения равенства нормированных значений противоречивых (конфликтных) частных критериев.

Отличие понятий «критерий» и «целевая функция» состоит в следующем:

1. Целевая функция может включать в себя более одного критерия.
2. Для целевой функции всегда и обязательно указывается вид экстремума:

$$f(x) \rightarrow \max(f(x) \rightarrow \min).$$

Различают два вида задач оптимизации:

1. Задачу минимизации.
2. Задачу максимизации.

Чтобы решить задачу минимизации функции  $f$  на множестве  $X$ , необходимо найти такой вектор  $x_0 \in X$  (а также соответствующее значение целевой функции  $f(x_0)$ ), чтобы неравенство:  $f(x_0) \leq f(x)$  выполнялось для всех  $x \in X$ . При этом  $x_0$  называют оптимальным решением (точнее здесь – минимальным решением), а  $f(x_0)$  – оптимумом (минимумом).

Чтобы решить задачу максимизации функции  $f$  на множестве  $X$ , необходимо найти такой вектор  $x_0 \in X$  (а также соответствующее значение целевой функции  $f(x_0)$ ), чтобы неравенство:  $f(x_0) \geq f(x)$  выполнялось для

всех  $x \in X$ . При этом  $x_0$  называют оптимальным (максимальным) решением, а  $f(x_0)$  – оптимумом (максимумом).

В общем виде находится именно вектор  $x_0$ , т.к., например, при решении двухпараметрической задачи, он будет включать в себя два параметра, трехпараметрической – три параметра и т.д.

Локальный и глобальный минимум (максимум) целевой функции.

При решении задач оптимизации следует иметь в виду, какой вид имеет целевая функция.

Например,  $a \leq x \leq b, f(x) \rightarrow \min$ . Целевая функция имеет вид, как показано на рис. 5.1. Здесь точка  $x_0$  - глобальный минимум, а точка  $x_1$  - локальный минимум целевой функции.

Пусть теперь  $a \leq x \leq b, f(x) \rightarrow \max$ , а целевая функция имеет вид, как показано на рис.5.2. Здесь точка  $x_0$  - глобальный максимум, а точка  $x_1$  - локальный максимум целевой функции.

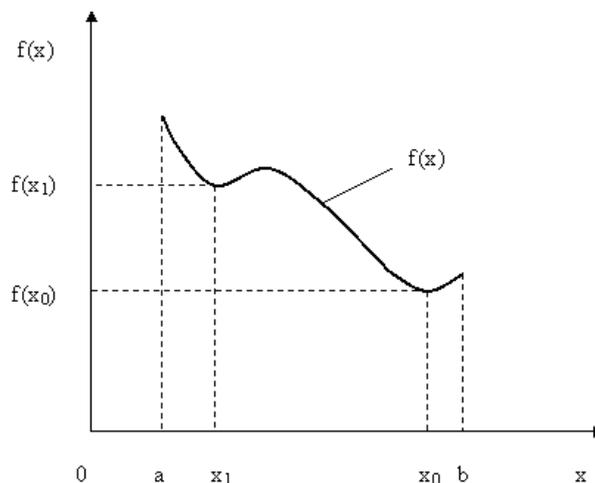


Рис.5.1. Иллюстрация понятий «локальный минимум» и «глобальный минимум» целевой функции

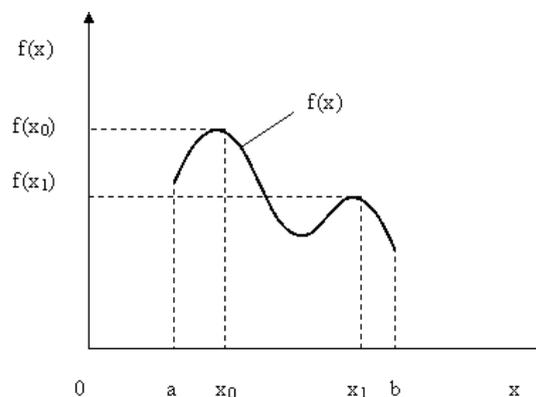


Рис.5.2. Иллюстрация понятий «локальный максимум» и «глобальный максимум» целевой функции

### Разрешимость задач оптимизации.

Приведенная выше задача оптимизации имеет решение не при любых целевых функциях и допустимых множествах. Существуют задачи, в которых невозможно найти оптимальное решение и экстремум целевой функции. Например, не существует точек минимума функции одной переменной  $f$  на множестве  $X(f(x) \rightarrow \min)$  в случаях, приведенных ниже на рис. 5.3, 5.4 и 5.5.

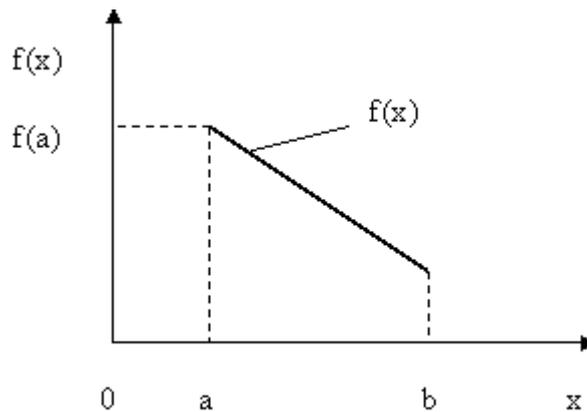


Рис.5.3. Иллюстрация случая, когда множество допустимых решений не замкнуто

Здесь граница « $a$ » множества допустимых решений в интервал входит, а граница « $b$ » нет.

$X = [a, b)$ - множество  $X$  не замкнуто, следовательно,  $f(b)$  – не существует.

В случае, представленном на рис.5.4, определена лишь одна левая граница множества допустимых решений.  $X = [a, \infty)$ , т.е. множество допустимых решений неограниченно.

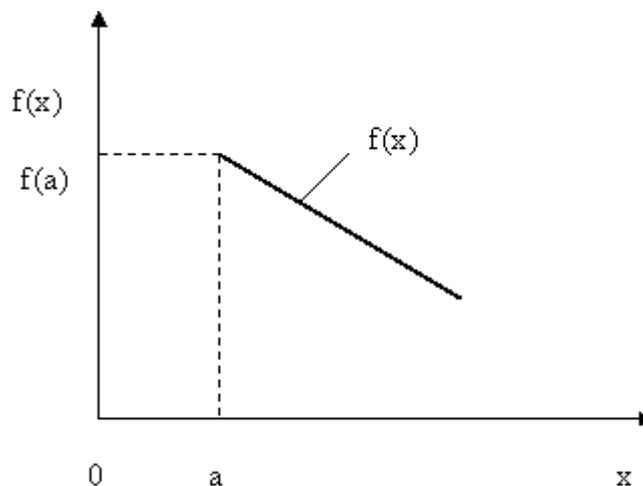


Рис.5.4. Иллюстрация неограниченности множества допустимых решений

На рис.5.5. показан еще один случай, когда задача оптимизации не имеет однозначного решения.

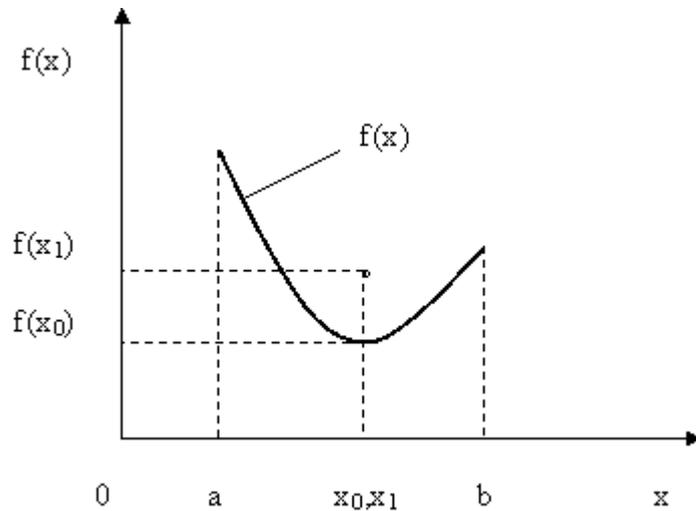


Рис.5.5. Иллюстрация случая, когда функция  $f(x)$  не является непрерывной

Здесь функция  $f(x)$  не является непрерывной, т.к. в точке  $x_0(x_1)$  существуют два значения функции —  $f(x_0)$  и  $f(x_1)$ .

Следовательно, задача оптимизации разрешима, если выполняются следующие три условия:

1. Множество допустимых решений  $X$  замкнуто, т.е. если предельные точки принадлежат этому множеству.
2. Множество  $X$  ограничено.
3. Целевая функция  $f(x)$  непрерывна.

Это нестрогая формулировка теоремы Вейерштрасса [34].

**Определение.** Пусть на множестве  $U$ , состоящем из элементов  $u$  линейного метрического пространства определена скалярная функция  $\Phi(u)$ .

1. Говорят, что  $\Phi(u)$  имеет локальный минимум на элементе  $u^*$ , если существует его конечная  $\varepsilon$ -окрестность, в которой выполнено

$$\hat{O}(e^*) \leq \hat{O}(e), \quad \|e - e^*\| \leq \varepsilon. \quad (5.1)$$

2.  $\Phi(u)$  достигает глобального минимума в  $u$  на элементе  $u^*$  (строгий, абсолютный минимум), если имеет место равенство

$$\hat{O}(e^*) = \inf_U \hat{O}(e). \quad (5.2)$$

**Замечание.** Если  $u$  — числовая ось, решается задача на нахождение минимума функции одного переменного, если  $u$  —  $n$ -мерное векторное про-

странство, имеется задача нахождение минимума функции  $n$  переменных, если  $u$  – функциональное пространство, то решается задача на отыскание функции, доставляющей минимум функционалу (задача оптимального управления или динамического программирования).

Если к (5.1) или (5.2) добавляются условия

$$\begin{aligned} e_k^0 \leq u_k \leq u_k^1, k = 1, \dots, K, \\ F_i^0 \leq \hat{O}_i(u) \leq F_i^1, i = 1, \dots, I \end{aligned}$$

( $u_k^\pm, F_i^\pm$  - числа, а  $\Phi_i$  - заданные функции), то это задача поиска условного минимума, если подобные ограничения отсутствуют, то это задача поиска безусловного минимума. Причем, если функции  $\Phi_i(u)$  линейны, задача поиска условного минимума называется задачей линейного программирования, если хотя бы одна из этих функций нелинейна, то имеется задача нелинейного программирования. Обе эти задачи вместе с задачей динамического программирования в теории оптимального управления называются задачами математического программирования.

Рассмотрим классификацию численных методов решения задач нелинейного программирования:

1. Численные методы поиска экстремума функции одной переменной.
  - 1.1. Классический метод.
  - 1.2. Метод равномерного перебора.
  - 1.3. Метод золотого сечения.
  - 1.4. Метод Фибоначчи и т.д.
2. Численные методы поиска экстремума функции  $n$  – переменных.
  - 2.1. Численные методы в задачах без ограничений.
    - 2.1.1. Метод покоординатного спуска.
    - 2.1.2. Метод Хука – Дживса.
    - 2.1.3. Градиентный метод.
    - 2.1.4. Метод Ньютона.
    - 2.1.5. Метод сопряженных направлений и т.д.
  - 2.2. Численные методы в задачах с ограничениями.
    - 2.2.1. Метод покоординатного спуска.
    - 2.2.2. Метод условного градиента.
    - 2.2.3. Метод барьерных функций.
    - 2.2.4. Метод штрафных функций.
    - 2.2.5. Метод линеаризации и т.д.

Универсального метода, с помощью которого можно было бы решить любую задачу оптимизации, не существует. Поэтому для решения конкретной задачи применяют один или несколько своих численных методов.

## 5.2. Численные методы решения задач одномерной оптимизации

### Методы поиска экстремума функции одной переменной

Эти методы применяются в однопараметрических задачах оптимизации. В них ищется один оптимальный параметр. Целевая функция – это функция одной переменной.

Постановка задачи. Найти значение переменной  $x$ , доставляющее минимум или максимум целевой функции  $y = f(x)$ , при условиях  $g_j(x) = (\leq, \geq) b_j, (j = \overline{1, m})$ .

Рассмотрим классический метод минимизации (максимизации) функции одной переменной.

Пусть  $a \leq x \leq b$ , функция  $f(x)$  непрерывна на этом отрезке и имеет на нем непрерывную производную. Вычисляют значение производной  $f'(x)$  и определяют критические точки, т.е. такие внутренние точки отрезка  $[a, b]$ , в которых производная обращается в нуль или не существует. В окрестности каждой такой критической точки исследуют знак производной и отбирают те из них, при переходе через которые производная меняет знак с минуса на плюс (это точки локального минимума) или с плюса на минус (это точки локального максимума). Затем вычисляют значения целевой функции в этих точках и на границах отрезка  $[a, b]$ . Эти значения сравнивают между собой и определяют точку, в которой достигается минимум (максимум) целевой функции. Эта точка является точкой глобального минимума (максимума) функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$ .

При решении реальных задач оптимизации данный метод применяется редко, т.к. зачастую производную целевой функции определить сложно или невозможно.

Метод равномерного перебора.

Пусть дана функция  $y = f(x) \rightarrow \min$  (см. рис 5.6).

В соответствии с данным методом алгоритм поиска  $x_{\min}$  заключается в следующем. Фиксируют величину шага  $h > 0$ . Вычисляют значения целевой функции в точках  $x_1 = a$  и  $x_2 = x_1 + h - f(x_1)$  и  $f(x_2)$ . Полученные значения сравнивают. Запоминают меньшее из этих двух значений. Далее выбирается точка  $x_3 = x_2 + h$  и в ней вычисляется значения целевой функции  $f(x_3)$ . Сравнивается оставшееся на предыдущем шаге значение и значение  $f(x_3)$ . Наименьшее из них опять запоминают. Так поступают до тех пор, пока очередное значение  $x$  не превысит  $b$ . Последнее оставшееся значение является приближенным значением глобального минимума.

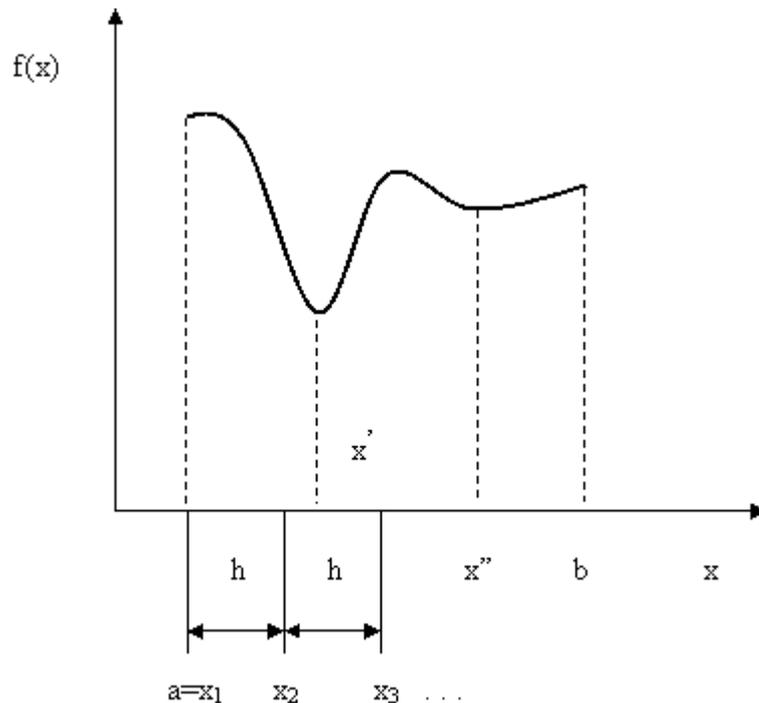


Рис. 5.6. Графическая иллюстрация метода равномерного перебора

Трудности при использовании данного метода. Если целевая функция имеет узкую впадину, подобную приведенной на рис. 5.6, то можно ее проскочить, и вместо точки глобального минимума определить точку локального минимума. Т.е. вместо точки  $x'$  можно найти  $x''$ . Эта проблема частично снимается, если выбрать очень маленький шаг, но при этом потребуется много времени (в том числе и машинного) для решения задачи.

#### **Метод золотого сечения.**

Рассматриваемая в данном методе функция должна быть унимодальной. Функция  $f(x)$  является унимодальной на отрезке  $[a, b]$ , если она на этом отрезке имеет единственную точку глобального минимума и слева от этой точки является строго убывающей, а справа строго возрастающей.

Суть метода золотого сечения заключается в том, чтобы определить точку глобального минимума на отрезке  $[a, b]$  за минимальное количество шагов, т.е. за минимальное количество вычислений целевой функции.

В соответствии с данным методом в каждый текущий момент времени рассматривается всегда две точки, например, в начальный момент точки  $x_1$  и  $x_2$  так, чтобы  $a < x_1 < x_2 < b$ . При этом возможен один из двух случаев (рис.5.7).

Согласно свойству унимодальной функции в первом случае искомая точка  $x_{min}$  не может находиться на отрезке  $[x_2, b]$ , во втором случае на отрезке  $[a, x_1]$  (показаны штриховкой). Значит, область поиска сужается,

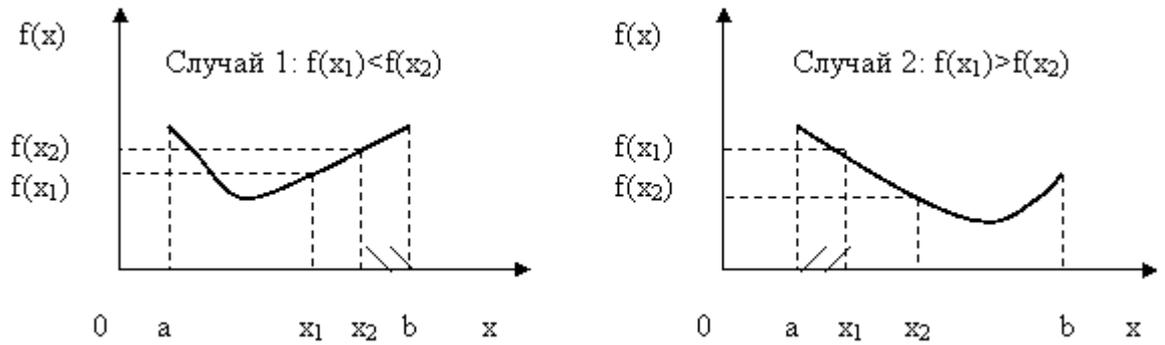


Рис.5.7. Иллюстрация обоснования исключения отрезков

и следующую точку  $x_3$  необходимо брать на одном из укороченных отрезков:  $[a, x_2]$  - случай 1 или  $[x_1, b]$  - случай 2.

Теперь следует определиться, где на исходном отрезке  $[a, b]$  необходимо выбирать точки  $x_1$  и  $x_2$ . Первоначально ничего не известно о положении точки  $x_{min}$  (графиков нет, и они не строятся, здесь мы их приводим для наглядной иллюстрации сути метода, при реальной оптимизации есть только выражение для целевой функции). Поэтому любой из приведенных выше случаев возможен с одинаковой вероятностью. Это означает, что лишним может оказаться любой из отрезков:  $[x_2, b]$  или  $[a, x_1]$ . Отсюда ясно, что точки  $x_1$  и  $x_2$  следует выбирать симметрично относительно середины отрезка  $[a, b]$ .

Далее для того, чтобы максимально сузить область поиска, эти точки должны быть поближе к середине исходного отрезка. Однако слишком близко к середине отрезка их тоже брать не следует, т.к. мы хотим построить алгоритм, для реализации которого необходимо общее минимальное количество вычислений целевой функции. Рассмотрим рис. 5.8.

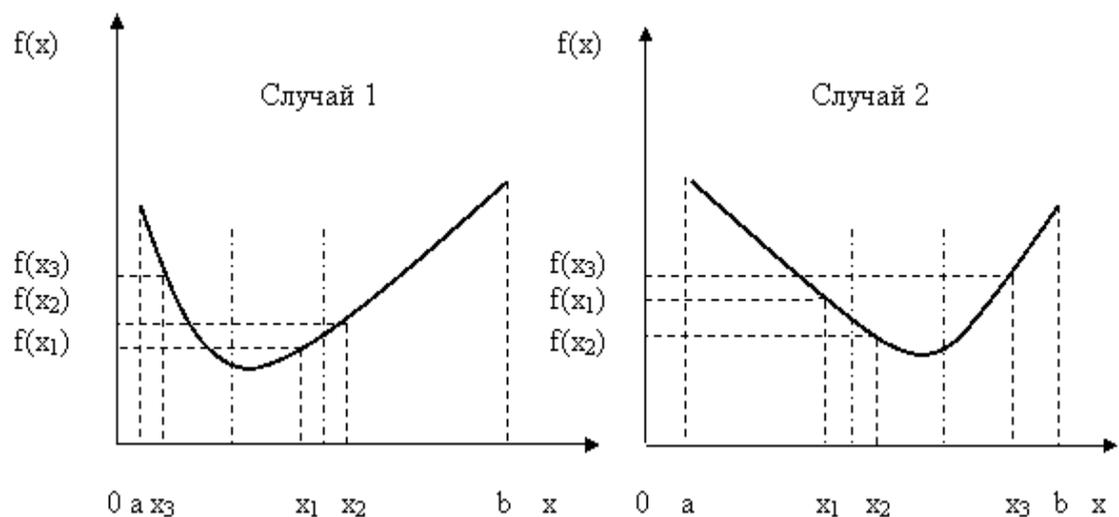


Рис.5.8. Иллюстрация обоснования расположения точек на отрезке

Выбирая на первом шаге сравниваемые точки слишком близко к середине отрезка  $[a, b]$ , мы исключим из рассмотрения большой отрезок  $[x_2, b]$  для случая 1 или  $[a, x_1]$  для случая 2. Но на втором шаге величина исключаемого отрезка значительно уменьшится (будет исключен отрезок  $[a, x_3]$  для случая 1 или отрезок  $[x_3, b]$  для случая 2).

Таким образом, с одной стороны, точки следует брать рядом с серединой отрезка, а, с другой стороны, слишком близко друг от друга их брать нельзя. Т.е. необходимо найти некую «золотую середину». Для этого рассмотрим для простоты вместо отрезка  $[a, b]$  отрезок  $[0, 1]$  единичной длины – рис.5.9.

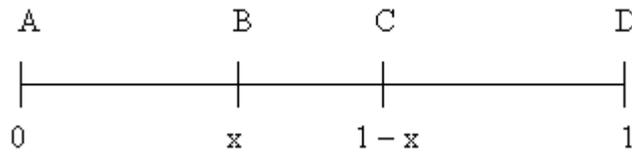


Рис.5.9. Обоснование «золотой середины» расположения точек на отрезке

На этом рисунке  $|AB|=|CD|=x$ ,  $|AC|=|BD|=1-x$ ,  $|DC|=1-2x$ .

Для того, чтобы точка В была «выгодной» как на данном, так и на следующем этапе (шаге), она должна делить отрезок AD в таком же отношении, как и AC:  $AB/AD = BC/AC$ . При этом в силу симметрии аналогичным свойством будет обладать и точка С:  $CD/AD = BC/BD$ . В обозначениях координаты  $x$  эти пропорции принимают вид:  $x/1 = (1 - 2x)/(1 - x)$ . Решим эту пропорцию:

$$x(1-x)=1-2x \rightarrow x-x^2=1-2x \rightarrow x-x^2-1+2x=0 \rightarrow -x^2+3x-1=0 \rightarrow x^2-3x+1=0, \\ D = b^2 - 4ac = 9 - 4 = 5.$$

Корни этого уравнения равны:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = 0,382, x_2 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{3 + \sqrt{5}}{2} > 1$$

не приемлем, т.е. уравнение имеет один корень.

О точке, которая расположена на расстоянии  $\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$  длины от одного из концов отрезка, говорят, что она осуществляет «золотое сечение» данного отрезка.

Очевидно, что каждый отрезок имеет две такие точки, расположенные симметрично относительно его середины.

Итак, алгоритм метода «золотого сечения» заключается в следующем (см. также рис.5.7). На исходном отрезке  $[a, b]$  выбираются две точки  $x_1$  и  $x_2$ , так, чтобы выполнялось приведенное выше соотношение «золотого сечения» этого отрезка. Вычисляются значения целевой функции в этих точках –

$f(x_1)$  и  $f(x_2)$ . Они сравниваются, и из дальнейшего рассмотрения исключается отрезок, прилегающий к точке, дающей большее значение целевой функции (здесь отрезок  $[x_2, b]$ ). Т.е. исходный отрезок  $[a, b]$  «стягивается» до отрезка  $[a, b_1]$ . Для этого нового отрезка находится его середина, и по отношению к ней симметрично оставшейся точке  $x_1$  ставится точка  $x_3$ . Для нее рассчитывается значение целевой функции  $f(x_3)$  и сравнивается с  $f(x_1)$ . Из дальнейшего рассмотрения опять исключается отрезок, прилегающий к точке с большим значением целевой функции, здесь это отрезок  $[a, x_3]$ . Текущий отрезок «стягивается» до нового отрезка, здесь это  $[a_1, b_1]$  и т.д.

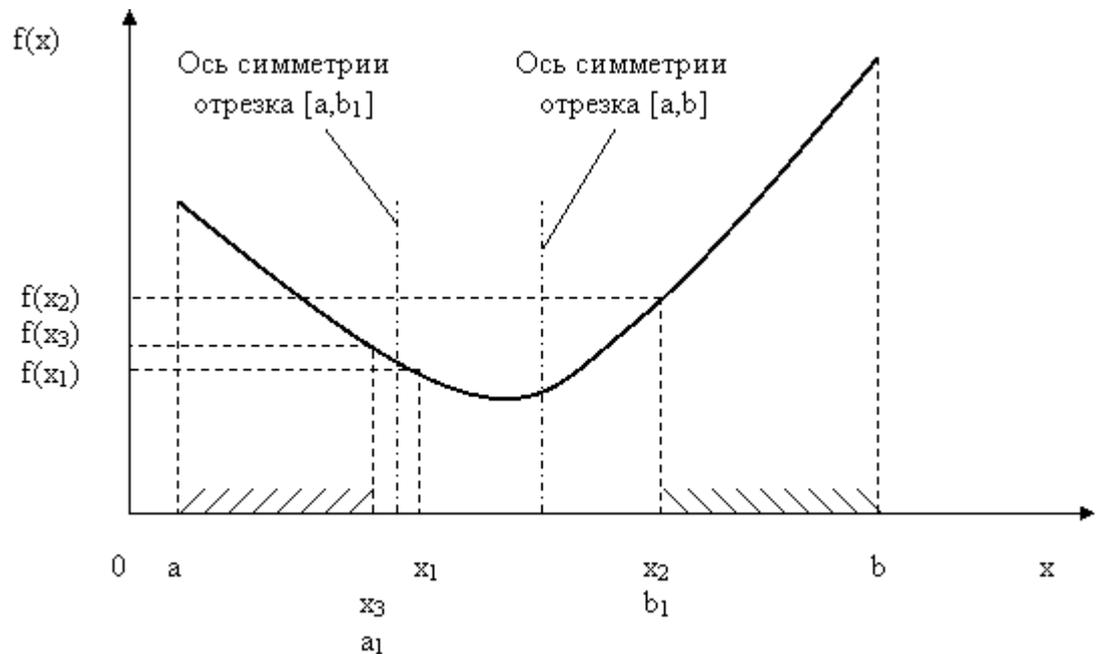


Рис. 5.7. Иллюстрация алгоритма метода «золотого сечения»

Метод «золотого сечения» прост, эффективен и широко применяется в практической оптимизации.

### Метод парабол.

Методы, использующие исключение отрезков, основаны на сравнении функций в двух точках пробного отрезка, учитываются лишь значения функции в этих точках.

Учет информации о значениях функции между точками позволяют методы полиномиальной аппроксимации. Их основная идея заключена в том, что функция  $\Phi(u)$  аппроксимируется полиномом, а точка его минимума служит приближением к  $u^*$ . Разумеется, в этом случае кроме свойства унимодальности (т.е. наличия единственного минимума на рассматриваемом отрезке), необходимо на  $\Phi(u)$  наложить и требования достаточной гладкости для ее полиномиальной аппроксимации.

Для повышения точности поиска  $u^*$  можно как увеличивать степень полинома, так и уменьшать пробный отрезок. Поскольку первый прием приво-

дит к заметному увеличению вычислительной работы и появлению дополнительных экстремумов, обычно пользуются полиномами второй (метод парабол) или третьей (метод кубической интерполяции) степени.

Алгоритм поиска минимума состоит в следующем.

Выбираем на пробном отрезке три точки  $u_1, u_2, u_3$  такие, что  $u_1 < u_2 < u_3$  и  $u_1 \leq u^* \leq u_3$ .

Построим параболу (квадратичный полином)

$$Q(u) = a_0 + a_1(u - u_1) + a_2(u - u_1)(u - u_2),$$

график которой проходит через точки  $(u_1, f(u_1)), (u_2, f(u_2)), (u_3, f(u_3))$ .

Коэффициенты  $a_k, k = 1, 2, 3$  находим из системы уравнений

$$Q(u_1) = f(u_1),$$

$$Q(u_2) = f(u_2),$$

$$Q(u_3) = f(u_3),$$

откуда

$$a_0 = f(u_1), a_1 = \frac{f(u_2) - f(u_1)}{u_2 - u_1},$$

$$a_2 = \frac{1}{u_3 - u_2} \left[ \frac{f(u_3) - f(u_1)}{u_3 - u_1} - \frac{f(u_2) - f(u_1)}{u_2 - u_1} \right].$$

Точку  $\bar{u}$  минимума  $Q(u)$  находим, приравнивая его производную к нулю:

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \frac{1}{2} \left( u_1 + u_2 - \frac{a_1}{a_2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left[ (u_1 + u_2) - \frac{(f_2 - f_1)(u_3 - u_2)}{u_2 - u_1} / \left( \frac{f_3 - f_1}{u_3 - u_1} - \frac{f_2 - f_1}{u_2 - u_1} \right) \right]. \end{aligned}$$

Далее полагаем:  $u^* \approx \bar{u}$  (очередное приближение точки минимума). Эту процедуру можно продолжить до достижения необходимой точности, выбирая новые точки  $u_k, k = 1, 2, 3$ . Для этого можно использовать методы исключения отрезков, используя в качестве двух пробных точек  $u_2$  и  $\bar{u}$ , таких, что  $u_2, \bar{u} \in [u_1, u_3]$ .

### 5.3. Методы минимизации функций многих переменных

#### 5.3.1. Методы спуска

Основная идея методов спуска состоит в том, чтобы построить алгоритм, позволяющий перейти из точки начального приближения  $u_0 = \{u_0^1, \dots, u_0^n\}$  в следующую точку  $u_1 = \{u_1^1, \dots, u_1^n\}$  таким образом, чтобы значение целевой функции приблизилось к минимальному.

**Метод покоординатного спуска.**

Этот метод является редукцией поиска функции многих переменных к последовательности поиска минимумов функции одной переменной. Пусть  $u^0 \in U$  – начальное приближение к минимуму  $\Phi(u)$ .

Рассмотрим  $\Phi(u_0) = \Phi(u_0^1, \dots, u_0^n)$  как функцию одной переменной  $u_1$  при фиксированных остальных и находим одним из приведенных методов поиска минимума функции одной переменной.

Полученное значение  $u_1$ , доставляющее минимум  $\Phi(u_1)$ , обозначим  $u_1^1$ ; при этом

$$\Phi(u_1^1, u_0^2, \dots, u_0^n) \leq \Phi(u_0^1, \dots, u_0^n).$$

Далее, при фиксированных значениях  $u_1^1, u_0^2, \dots, u_0^n$  ищем

$$\min_{u_2 \in U} \Phi(u_1^1, u_2^2, \dots, u_0^n),$$

как функции от  $u_2$ ; соответствующее значение  $u_2$  обозначим  $u_2^1$ ; при этом

$$\Phi(u_1^1, u_2^2, \dots, u_0^n) \leq \Phi(u_1^1, u_0^2, \dots, u_0^n).$$

Этот процесс продолжаем аналогичным образом и для оставшихся координат; в результате получим

$$\Phi(u_1^1, \dots, u_1^n) \leq \Phi(u_0^1, \dots, u_0^n).$$

Таким образом, переходим из точки  $u_0$  в точку  $u_1$ . Этот процесс повторяется до тех пор, пока не будет выполнено условие выхода из итераций, например:

$$|\Phi(u_{k+1}) - \Phi(u_k)| \leq \varepsilon,$$

где  $\varepsilon > 0$  — заданная точность.

Рассмотрим методы оптимизации 1-ого порядка.

Из курса математики известно, что направление наибольшего возрастания функции характеризуется ее градиентом. Если критерий оптимизации задан уравнением:  $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , то его градиент в некоторой точке  $O(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$  (из области определения функции) определяется вектором:

$$\nabla f \equiv \text{grad} f(O) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}(O), \frac{\partial f}{\partial x_2}(O), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(O) \right).$$

Известно, что направление вектора градиента совпадает с направлением наибольшего возрастания функции  $f$  в данной точке. Противоположное направление - это направление наиболее крутого убывания. Если критерий

оптимизации задан аналитически, то вычисление градиента не представляет принципиальных трудностей. Однако, при оптимизации технологических систем критерий оптимизации, как правило задан в виде неявной функции.

В этом случае частные производные в точке  $O$  находят приближенными методами

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(0) = \lim_{\Delta x_i \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_i + \Delta x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, x_2, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)}{\Delta x_i}(0),$$

где  $\Delta$  - бесконечно малое приращение (1-5% от значения  $i$ -ой переменной).

Наряду с определением градиентного вектора основным вопросом, решаемым в методах градиента, является выбор шага движения по градиенту. Выбор величины шага в значительной степени зависит от вида поверхности. Если шаг слишком мал, это потребует продолжительных расчетов. Если наоборот размеры шага слишком велики, можно проскочить оптимум.

Метод градиента. Опишем принцип использования метода градиента на примере функции двух переменных  $f = f(X_1, X_2)$ .

Этот принцип без изменения переносится на любое число переменных. Рассмотрим двумерную задачу (рис. 5.8)

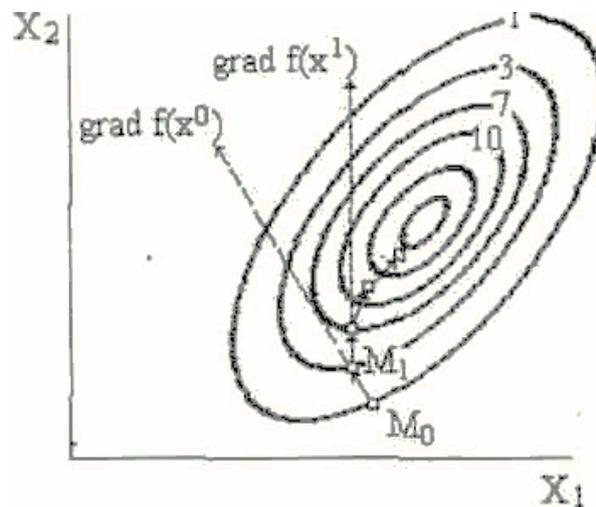


Рис. 5.8.

Пусть в начальный момент значения  $X_1$  и  $X_2$  соответствуют точке  $M_0$  (см. рис. 5.8). Цикл расчета начинается с серии пробных шагов. Сначала величине  $X_1$  дается небольшое приращение  $\Delta > 0$ , причем в это время  $X_2$  неизменно. Затем определяется полученное при этом приращение  $\Delta f$ , величины  $f$ , которое можно считать пропорциональным значению величины частной производной. Далее производится приращение величины  $X_2$ . В это время  $X_1 = const$ . Получаемое при этом приращение величины  $f$  является мерой другой частной производной. После нахождения составляющих градиента делается

рабочие шаги в направлении вектора градиента, если стоит задача определения максимума и в направлении противоположном, если решается задача поиска минимума.

$$X_i^{k+1} = X_i^k - S^k \cdot \frac{\partial f}{\partial X_i^k}, \quad i=1, 2, k=0, 1, 2, \dots, \quad (5.3)$$

$$S^k = \frac{\nabla f(X^k)}{\|\nabla f(X^k)\|},$$

$$\|\nabla f(X^k)\| = \sqrt{\frac{\partial f}{\partial (X_1^k)^2} + \frac{\partial f}{\partial (X_2^k)^2}}.$$

Таким образом определяются новые значения  $X_1$  и  $X_2$ , соответствующие точке М1. После каждого рабочего шага оценивается приращение  $\Delta f$  величины  $f$ . Если  $\Delta f > 0$  при поиске максимума или  $\Delta f < 0$  при поиске минимума, то движение происходит в правильном направлении, иначе необходимо уменьшить величину шага. В качестве примера рассмотрим задачу поиска минимума функции:  $f(X) = X_1^2 + 25 \cdot X_2^2$ .

Примем величину шага  $h = 1$ ,  $\Delta X_1 = \Delta X_2 = 0.05$ . В качестве исходной точки поиска возьмём точку  $X^0 = (2, 2)^T$ .

Поиск минимума осуществляем следующими этапами (см. табл. 5.1):

Таблица 5.

Шаг	$X_1$	$X_2$	$\nabla f(X_1^k)$	$\nabla f(X_2^k)$	$\ \nabla f(X^k)\ $	$S_1^k$	$S_2^k$	f
1	2	2	4.050	101.25	101.250	-0.040	-0.999	104.00
1	1.960	1.001	3.970	51.30	51.453	-0.077	-0.997	28.89
1	1.883	0.004	3.816	1.45	4.082	-0.035	-0.355	3.55
1	0.948	-0.351	1.94	-16.30	16.416	-0.119	0.993	3.98
Величина $\Delta f > 0$ , поэтому уменьшаем шаг вдвое.								
0.5	1.416	-0.174	2.882	-7.45	7.988	-0.180	0.466	2.76
0.5	1.236	0.292	2.552	15.85	16.049	-0.079	0.494	3.66
Величина $\Delta f > 0$ , поэтому уменьшаем шаг вдвое.								
0.25	1.326	0.059	2.702	4.20	4.994	-0.135	-0.21	1.84

### Метод Коши (наискорейшего спуска или крутого восхождения).

При использовании градиентного метода в задачах оптимизации основной объем вычисления приходится обычно на вычисление градиента целевой функции в каждой точке траектории спуска. Поэтому целесообразно

уменьшить количество таких точек без ущерба для самого решения. Это достигается в методе Коши (наискорейшего спуска). Согласно этому методу, после определения направления поиска оптимума в начальной точке, в этом направлении делают не один шаг, а двигаются до тех пор пока происходит улучшение функции, достигая таким образом, экстремума в некоторой точке. В этой точке вновь определяют направление поиска (с помощью градиента) и ищут новую точку оптимума целевой функции и т.д. (см. рис. 5.9). В этом методе поиск происходит более крупными шагами, и градиент функции вычисляется в меньшем числе точек (см. рис. 5.9). Заметим, что метод наискорейшего спуска сводит многомерную задачу оптимизации к последовательности одномерных задач оптимизации, которые могут решаться, например, методом золотого сечения или половинного деления.

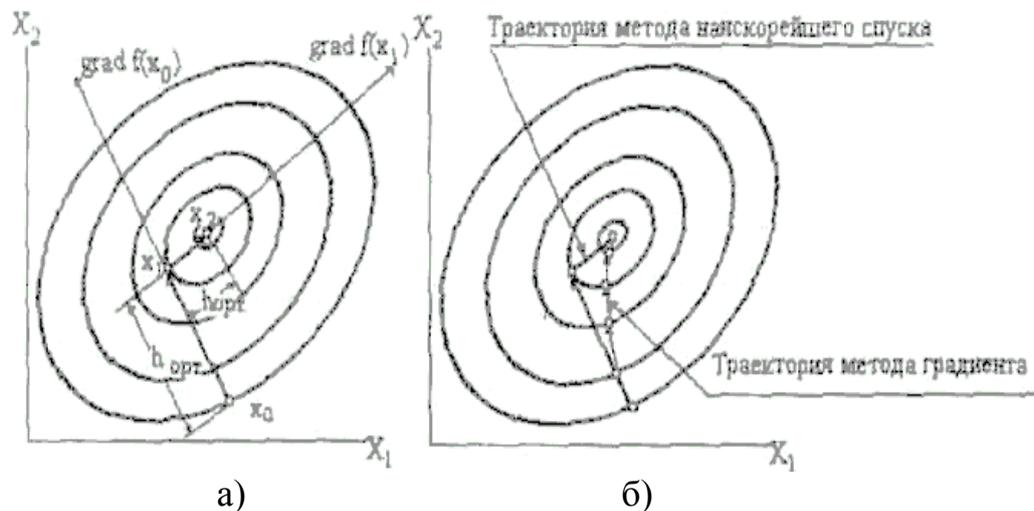


Рис. 5.9. Метод наискорейшего спуска

- а) Поиск максимума с выбором оптимального шага.  
 б) Сравнение с методом градиента.

Величину шага  $h$  можно определить из условия минимума  $f(X_k + h^k S^k)$ :

$$h^k = -\frac{\nabla^T f(X_k) S^k}{(S^k)^T \nabla^2 f(X_k)}$$

Пример. В качестве примера рассмотрим задачу поиска минимума функции:

$$f(X) = X_1^2 + 25X_2^2.$$

Этап	Шаг $h^k$	$X_1$	$X_2$	$\frac{\partial f}{\partial X_1}$	$\frac{\partial f}{\partial X_2}$	f
0		2	2	4.050	101.25	104.00
1	2.003	1.92	-0.003	3.84	-0.15	3.19
2	1.85	0.07	0.07	0.14	3.5	0.13
3	0.07	0.07	-0.000			0.0049

**Метод сопряжённых градиентов.**

Квадратичная целевая функция  $n$  независимых переменных, имеющая минимум, может быть минимизирована за  $n$  шагов (или менее), если шаги предпринимаются в так называемых сопряжённых направлениях.

Вектор  $S_1$  называют сопряжённым вектору  $S_0$ , если

$$S_1^T [\nabla^2 f(x_0)] S_0 = 0,$$

где

$$[\nabla^2 f(x_0)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{bmatrix}$$

Пример. Пусть  $f(X) = X_1^2 + X_2^2 - 4$ ,  $X_0 = (4, 4)$ ,

$$S_0 = \begin{bmatrix} 0.5 \\ \sqrt{3} \\ 2 \end{bmatrix}$$

Обозначим координаты вектора  $S_1 (S_1^1, S_1^2)$ . Тогда

$$\begin{bmatrix} S_1^1 & S_1^2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0.5 \\ \sqrt{3} \\ 2 \end{bmatrix} = 0$$

или

$$\begin{bmatrix} S_1^1 & S_1^2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{bmatrix} = 0.$$

Отсюда  $S_1^1 + \sqrt{3} * S_1^2 = 0$ .

Добавим условие, чтобы длина вектора была равна 1:

$$\sqrt{(S_1^1)^2 + (S_1^2)^2} = 1$$

Отсюда находим

$$S_1 = \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0.5 \end{bmatrix}$$

Вычислим градиент функции в исходной точке –

$$\nabla f(X) \equiv \begin{bmatrix} 2X_1 \\ 2X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 8 \end{bmatrix}$$

$$\nabla f^Y(X) = [8 \quad 8]$$

Находим:

$$h = \frac{[8 \quad 8] \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0.5 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0.5 \end{bmatrix}},$$

$$h = \frac{-4\sqrt{3} + 4}{[0 \quad 1] \begin{bmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 0.5 \end{bmatrix}},$$

$$h = \frac{-2.93}{0.5},$$

$$h = -5.86.$$

Тогда

$$\begin{bmatrix} X_1^1 \\ X_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \end{bmatrix} + 5.86 \begin{bmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Метод вторых производных.

Метод Ньютона.

В соответствии с этим методом:

$$\bar{X}^{K+1} = \bar{X}^K \pm \left[ \nabla^2 F(\bar{X}^K) \right]^{-1} \nabla F(\bar{X}^K)$$

$$\left[ \nabla^2 F(\bar{X}^k) \right]^{-1}$$

матрица обратная матрице Гессе.  
Матрица Гессе

$$\nabla^2 f(X) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_1 \partial x_i} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_2 \partial x_i} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \dots & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix}$$

Пример. Найти минимум функции Розенброка:

$$f(X) = 100 * (x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2$$

В качестве исходной точки поиска примем  $X = [-0.5 \ 0.5]^T$ .  $f(X) = 8.5$

$$\left[ \nabla^2 f(x^k) \right]^{-1} * \nabla f(x^k) \equiv \frac{1}{98} * \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0.51 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 47 \\ 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.03 \\ -0.22 \end{bmatrix}$$

$$x^{(k+1)} \equiv \begin{bmatrix} -0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -0.03 \\ -0.22 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.53 \\ -0.28 \end{bmatrix}$$

$$f(x) = 2.33$$

Мы рассмотрели основы методов оптимизации, для более глубокого их изучения можно обратиться к многочисленным литературным источникам, в том числе [16, 29, 34]. Ряд методов будет использован при выполнении практикума на ЭВМ.

## 6. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О САПР В ОМД

### 6.1. Общие сведения о структуре и возможностях САПР в области прессования

Система конструкторско-технологической подготовки производства изделий из различных сплавов включает ряд взаимосвязанных этапов. К ним относятся подготовка чертежей нормалей пресс-изделий, проектирование инструмента, назначение технологических режимов прессования, подготовка программ для станков с ЧПУ и изготовление инструмента. На каждом из этапов формируется один или несколько документов на каждый типоразмер профиля, при этом временные затраты на выполнение оформительских и чертежных работ составляют 10-60% от общего времени работы конструктора.

Требование сокращения сроков подготовки производства сужает возможность проведения многовариантных конструкторских и технологических расчетов. Во многих случаях проектные решения принимают интуитивно, что не дает возможности осуществить полную формализацию процедуры проектирования, а так как расчеты проводятся вручную, то значительно увеличиваются затраты времени. Достаточно трудоемкой является стадия подготовки программ для станков с ЧПУ.

Основу идеологии разработанной системы составляет замкнутость информационной цепочки нормаль – проектирование матрицы – подготовка программ для станка с ЧПУ – станок ЧПУ через телекоммуникационную сеть или машинные носители данных, что обеспечивает высокое качество информационной подготовки изготовления прессовых матриц.

САПР INPRESS [5] состоит из четырех подсистем (рис. 6.1), каждая из которых включает комплекс процедур расчета и проектирования, обеспечивающих подготовку документации для реализации выбранного технологического процесса. Так, подсистема проектирования сплошных профилей из алюминиевых сплавов позволяет подготовить чертежи матриц, форкамер, подкладок и других видов прессового инструмента, а также рассчитать усилие и выбрать оборудование для прессования алюминиевых сплавов, в том числе и при прессовании с форкамерами.

Подсистема проектирования полых профилей позволяет получить сборочный чертеж инструментальной наладки для полых профилей, чертежи рассекателя, матрицы, а также вычислить усилие для различных схем прессового инструмента. Задача проектирования прессового инструмента применительно к процессам непрерывного прессования во многих случаях может решаться аналогично имеющимся методам проектирования для дискретного прессования. Так, выбор расположения контура пресс-изделия на зеркале матрицы, назначение припусков на размер канала матрицы, расчет величины



Рис. 6.1. Структурная схема САПР

калибрующих поясков с достаточной точностью может быть выполнен с применением подсистемы проектирования сплошных профилей. Однако такие процедуры, как расчет устойчивости процесса, определение его энергосиловых характеристик в зависимости от формы и размеров спроектированного инструмента и другие, являются специфичными, что обусловило создание подсистемы проектирования прессового инструмента процесса непрерывного прессования.

База данных является вспомогательной подсистемой и обеспечивает функционирование и хранение информации (графической и числовой) для основных технологических подсистем и кроме того содержит информацию о стойкости и наработке инструмента.

Система INPRESS может функционировать автономно, а также в среде графического пакета AutoCAD. Для связи расчетных модулей с пакетом предусмотрены интерфейсные программы, обеспечивающие в процессе работы беспрепятственный вход – выход в рамках системы и передачу вычисленных параметров в AutoCAD.

На основе диагностического анализа существующей системы проектирования были сформированы цели и задачи проектирования, а так же проектные процедуры САПР прессового инструмента. Методики проектирования основаны на моделях [5] и для разработки многих проектных процедур и операций пришлось выполнить комплекс научно-исследовательских работ.

Подсистема проектирование инструмента INPRESS1 (рис. 6.2), которая позволяет выполнить в диалоговом режиме все указанные на схеме процедуры.

Работа подсистемы INPRESS1 осуществляется в режиме диалога через набор меню, причем творческое участие конструктора в силу слабой формализуемости некоторых задач является одной из особенностей системы.

Меню подсистемы связаны друг с другом по иерархической схеме, включающей основные этапы проектирования, и расположены в приоритетном порядке.

Окно задач в графическом режиме представляет собой экран, содержащий в верхней части название процедуры, затем область меню, в средней



Рис. 6.2. Структурная схема подсистемы INPRESS1

части – область чертежа, где выводятся изображение профиля и необходимые результаты расчета, и в нижней части – информационную область. Меню системы, реализованное в текстовом режиме, содержит название окна, предлагаемые режимы работы системы или подсистемы. Выбор режима в меню производится клавишами управления перемещением курсора и нажатием клавиши ENTER или функциональными клавишами.

Создание чертежа – входной блок комплекса. Его назначение – обеспечение интерфейса в направлении пользователь – программный комплекс. Проектирование прессового инструмента начинается с создания чертежа профиля (нормали), что требует ввода информации. Ввод информации можно осуществить тремя путями: покоординатным; из базы данных; из системы AutoCAD.

Ввод информации начинается с ввода шифра профиля, который необходим для автоматического формирования имени файла чертежа нормали, группы сложности и марки материала, на основании которых далее при технологических расчетах будут определены некоторые параметры, например, вес одного погонного метра профиля. В программе предусмотрен перечень часто используемых марок сплавов и их удельные веса. При отсутствии марки сплава об этом выдается сообщение и тогда удельный вес сплава необходимо вводить с использованием справочной литературы.

Типовые расчеты служат основой для определения параметров, необходимых при проектировании чертежа изделия (нормали), причем пакет ти-

повых расчетов может быть использован как в рамках системы INPRESS, так и автономно.

Конструкторские расчеты – основной модуль САПР, выполняющий следующие операции: назначение припусков; размещение профиля на зеркале матрицы; расчет калибрующих поясков; назначение подрезки.

Назначение припусков – модуль, реализующий выбор припуска на размер канала матрицы в соответствии с руководящими технологическими материалами (РТМ). Процесс назначения припусков тяжело поддается формализации и зависит от субъективных факторов (опыта конструктора). При назначении припусков используются их табличные значения, широко применяемая в практике работы конструкторов.

Расчет усилий при прессовании с применением форкамерного инструмента включает выполнение следующих процедур:

ввод исходной числовой информации в виде групп данных о сплаве, прессуемом профиле, оборудовании и его характеристиках, выбранном для прессования слитке и параметрах инструмента (матрицы и форкамеры);

автоматизированный расчет усилия прессования;

неавтоматизированный расчет усилия, когда сопротивление деформации металла задается технологом с использованием справочных данных либо опытных значений;

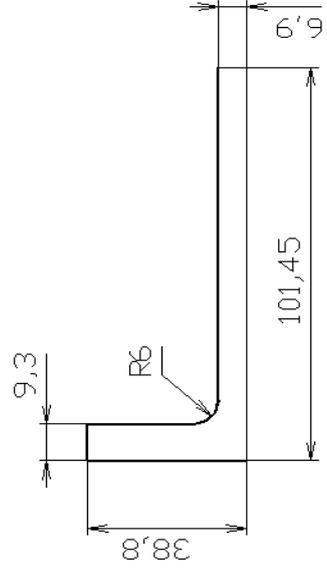
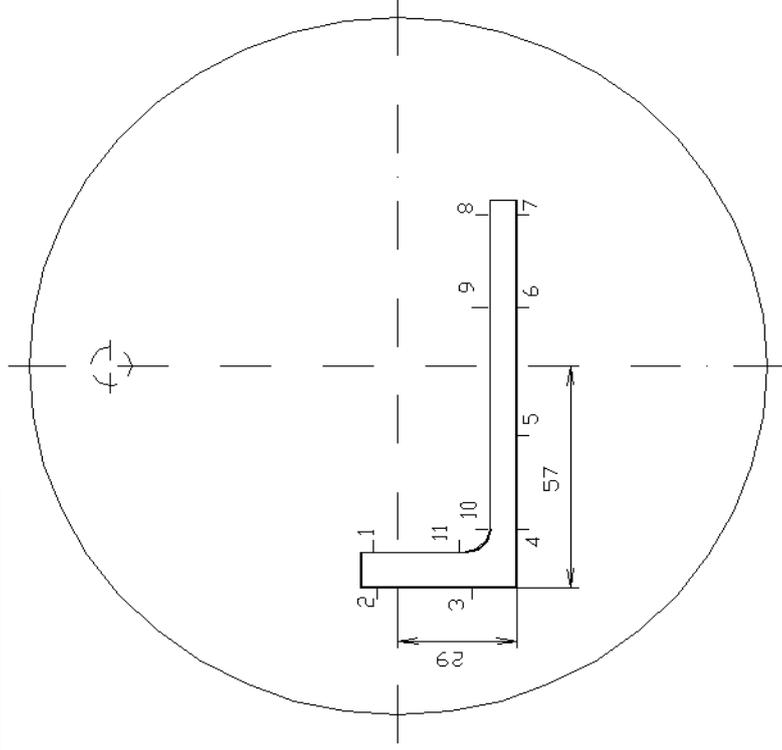
расчет усилия прямого прессования без использования форкамер (для анализа и оценки процесса проектирования технологии);

формирование выходных данных расчета в виде таблиц в соответствии с его последовательностью.

В результате работы САПР формируются следующие документы:

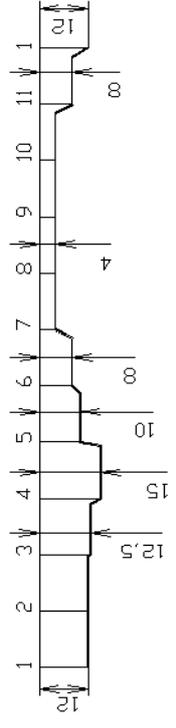
- чертеж матрицы (рис. 6.3);
- чертеж форкамеры (рис. 6.4);
- данные по энергосиловым параметрам процесса прессования (рис.6.5).

1-9001-Э0-ЦИ  
ИП-03-1006-1



1. HRC 45 ... 48
2. Матрица изготовить по чертежy ИП-04-226
3. Предельное отклонения размеров рабочих отверстий по СТП 808-01-88, П.2.1.6.
4. Подрезка рабочего пояса 2+0,3 мм по контуру
5. Переходы рабочего пояса выполнять под углом 45 град.
6. Пресс 2000 тс. Контейнер 170 мм. Вытяжка Э3,Э. Доо=127 мм.

Развертка рабочего пояса



ИЗН	№ док-м.	Подп.	Дата	ИП-03-1006-1	
Разраб.				Матрица	Лист
Проб.				ПК2-152	Листов 1
Т.КОНТР				Сталь 3Х2В8Ф	КРАМЗ
Зам.ш.					
УТВ.					

Рис. 6.3. Чертеж матрицы

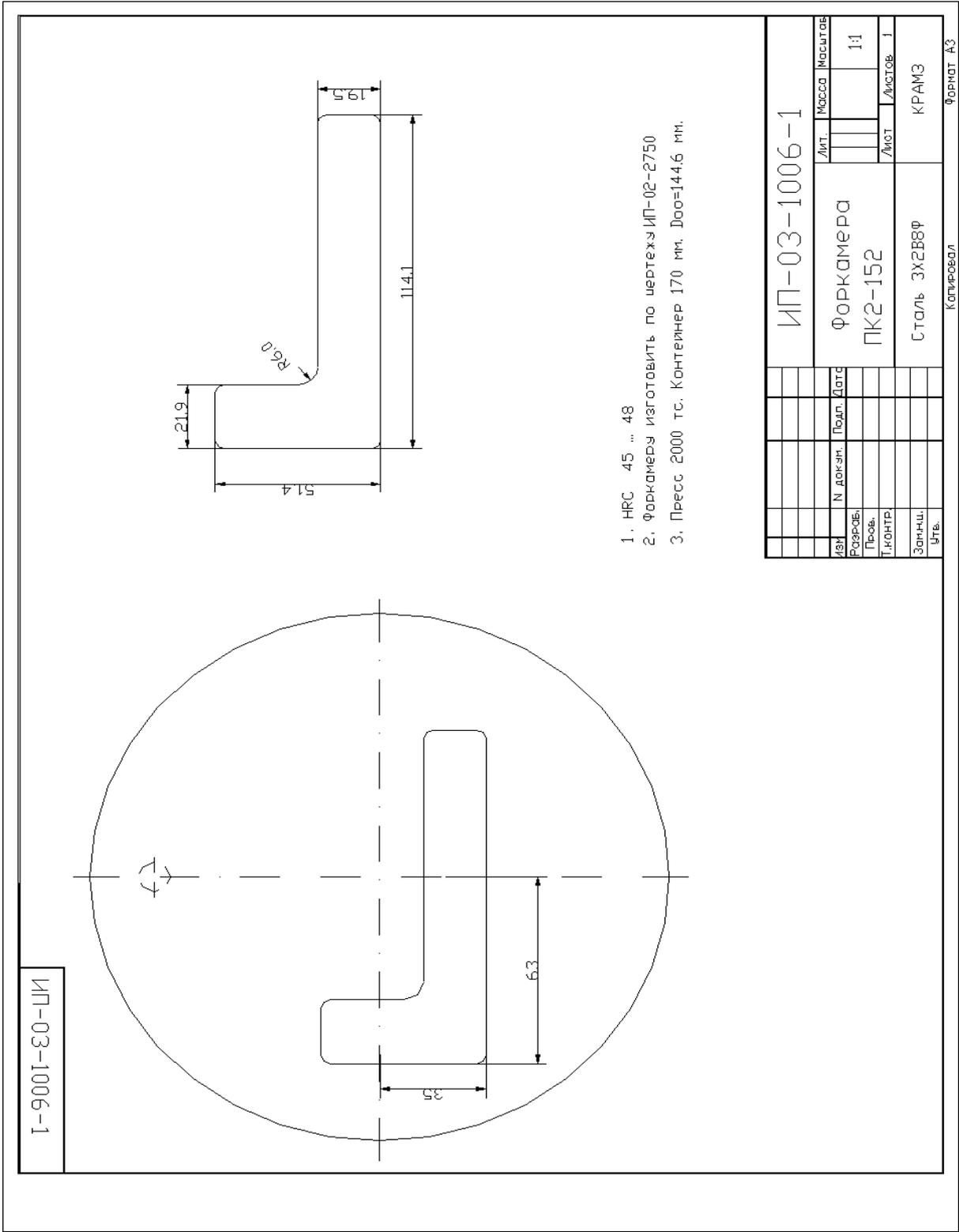


Рис. 6.4. Форкамера для профиля 41311

Исходные данные для расчета энергосиловых параметров				
- номер профиля		/n /	:	411331
- площадь профиля,	mm <sup>2</sup>	/f1/	:	941
- периметр профиля,	mm	/c1/	:	273
- ширина профиля,	mm	/b1/	:	100
- толщина профиля,	mm	/s /	:	9
- средняя высота, рабочего пояска,	mm	/h1/	:	8
Процесса:				
- диаметр контейнера		/d0/	:	170
- скорость прессштемпеля, мм/с		/v0/	:	5.5
- длина распрессованного слитка		/l0/	:	500
- температура слитка		/t0/	:	480
- число каналов матрицы		/k9/	:	1
Форкамеры:				
- площадь форкамеры,	мм <sup>2</sup>	/f2/	:	2824
- периметр форкамеры,	мм	/c2/	:	307
- глубина форкамеры,	мм	/h2/	:	15
- ширину форкамеры,	мм	/b2/	:	22
- вытяжка		/l2/	:	3

#### Результаты расчета энергосиловых параметров

Длительность деформации в контейнере (с), $t_1 = 8.74702$				
Начальное $S_{до} = 1.33618$ кг/мм*мм. Конечное $S_{дк} = 2.24708$ кг/мм*мм				
Уточните (для контейнера): Начальное $S_{до} = 1.3$				
Конечное $S_{дк} = 4$				
тогда среднее $S_{дср} = 2.28035$				
$S_{д}$ среднее в форкамере = 4.00000				
Составляющие усилия прессования (ТМ1, РМ1, ТК), суммарное усилие (Р1) в кг и давление (Р1/Ф) в кг/мм*мм при прессовании ИЗ КОНТЕЙНЕРА В ФОРКАМЕРУ.				
ТМ	РМ	ТК	Р1	Р1/Ф1
62247.13	143740.78	258033.53	533564.23	23.52
Составляющие усилия (ТМ2+РМ2, ТР, ТФк), суммарное усилие (Р2) в кг и давление (Р2/Ффк) в кг/мм*мм при прессовании ИЗ ФОРКАМЕРЫ В ПРОФИЛЬ.				
ТМ2+РМ2	ТР	ТФк	Р2	Р2/Ффк
191301.20	120093.41	206207.46	517602.06	22.81
Номер профиля (N), Вытяжка по форкамере (L2), Глубина ФК (H2) в мм Относительное давление (Р2/С) в кг/мм*мм и усилие (Р) в кг				
Номер профиля	Вытяжка по форкамере	Глубина ФК, мм	Отн. давление Р/С	Полное усилие, кг
411331	3.00	15.00	5.70	1051166.29

Рис. 6.5. Пример расчета усилия прессования с форкамерной матрицей

Для проектирования процессов непрерывного прессования разработана подсистема INPRESS3, включающая ряд процедур (рис. 6.6), позволяющих осуществить имитационное моделирование процесса в динамическом режиме, рассчитать устойчивость процесса совмещенной прокатки-прессования, а также выбрать параметры очага деформации для заданного прессуемого профиля, определить усилие деформации и, наконец, спроектировать валковый и прессовый инструмент. Особенностью подсистемы является возможность ее работы как в автономном режиме, так и в среде графического пакета AutoCAD, обеспечивающего режим подготовки твердых копий чертежей инструмента.

Представляемый программный продукт имеет широкий спектр средств программирования для его реализации. Современные средства программирования (языки программирования) открывают перед рядовым пользователем и программистом неограниченные возможности, т.е. позволяют полностью использовать все функциональные и интеллектуальные возможности ЭВМ и человека соответственно.

В качестве основного языка программирования был выбран алгоритмический язык Паскаль. Но работа только в одной среде программирования невозможна для реализации всех идей, поэтому были привлечены и другие средства. Одним из наиболее важных средств является универсальная проектирующая программа AutoCAD, использование которой позволяет изготавливать, проектировать и редактировать чертежи проектируемого инструмента.

В подсистеме использованы мощные системы программирования, в качестве которых можно выделить следующие: трехмерный мультипликационный редактор 3D Studio, позволяющий изготавливать ролики для наглядной демонстрации технологических процессов; язык Ассемблер, который используется для написания подпрограмм, требующих очень большого быстродействия ЭВМ; операционная среда Windows, предназначенная для реализации приложений, работающих в среде Windows (например, графический редактор PaintBrush).

Для проектирования инструмента необходимо подготовить технологическую информацию, определить возможность протекания процесса деформации, произвести расчет параметров пресс-изделия. Поэтому алгоритм подсистемы построен в следующей последовательности.

1. Создание нормали (чертежа профиля). Процедура реализуется аналогично описанной процедуре INPRESS1 и подготавливает исходную информацию для расчетных блоков.

2. Моделирование формоизменения. В блоке модели формоизменения показываются все параметры очага деформации и характер истечения металла в процессе прокатки-прессования. Ориентировочно выбирают размеры прямоугольной заготовки и рассчитывают коэффициенты вытяжки (общий, при прокатке и прессовании). Задают окружную скорость вращения валков,



Рис. 6.6. Структурная схема подсистемы

ориентировочную температуру нагрева заготовки перед деформацией и из базы данных выбирают механические характеристики сплава.

3. Расчет устойчивости процесса прокатки-прессования. Для этого с помощью модели варьируют параметрами очага деформации (величиной абсолютного обжатия, размерами заготовки и др.) и получают информацию в графическом или табличном виде для принятия решения о возможности протекания процесса при заданных условиях. Выбор оптимальной величины отстояния матрицы от общей оси валков производят на основании расчетов. В случае невозможности осуществления процесса изменяют параметры очага деформации и повторяют проверку устойчивости.

4. Расчет энергосиловых параметров. С помощью математической модели процесса определяют давление на валки и у матрицы, а также усилие прокатки, усилие прессования и крутящие моменты со стороны закрытого и открытого ручьев калибра. Данный блок необходим для выбора мощности приводного двигателя установки и оценки уровня энергосиловых параметров в момент деформации.

5. Блок имитационного моделирования. С использованием этого блока выбирают разновидность процесса прокатки–прессования (вертикальный валковый узел, горизонтальный валковый узел, клиновое или гидравлическое устройство подпора и т.д.), в соответствии с чем производят дальнейшее проектирование.

6. Проектирование инструмента. Оно осуществляется с использованием ранее разработанных блоков подсистемы INPRESS1 (например, процедур размещения профиля на зеркале матрицы, расчета калибрующего пояска и др.) отдельно для прессового и валкового узлов. При создании чертежей инструмента используется графический пакет AutoCAD и графическая база данных типовых конструкций валков и матриц.

7. Создание сборочного чертежа. Эта операция является последней функцией подсистемы и служит для получения твердой копии чертежей для изготовления инструмента. Следует отметить, что при этом используются типовые чертежи инструмента, имеющиеся в базе данных.

Образец окна с расчетом энергосиловых параметров процесса прокатки-прессования дан на рис. 6.7.

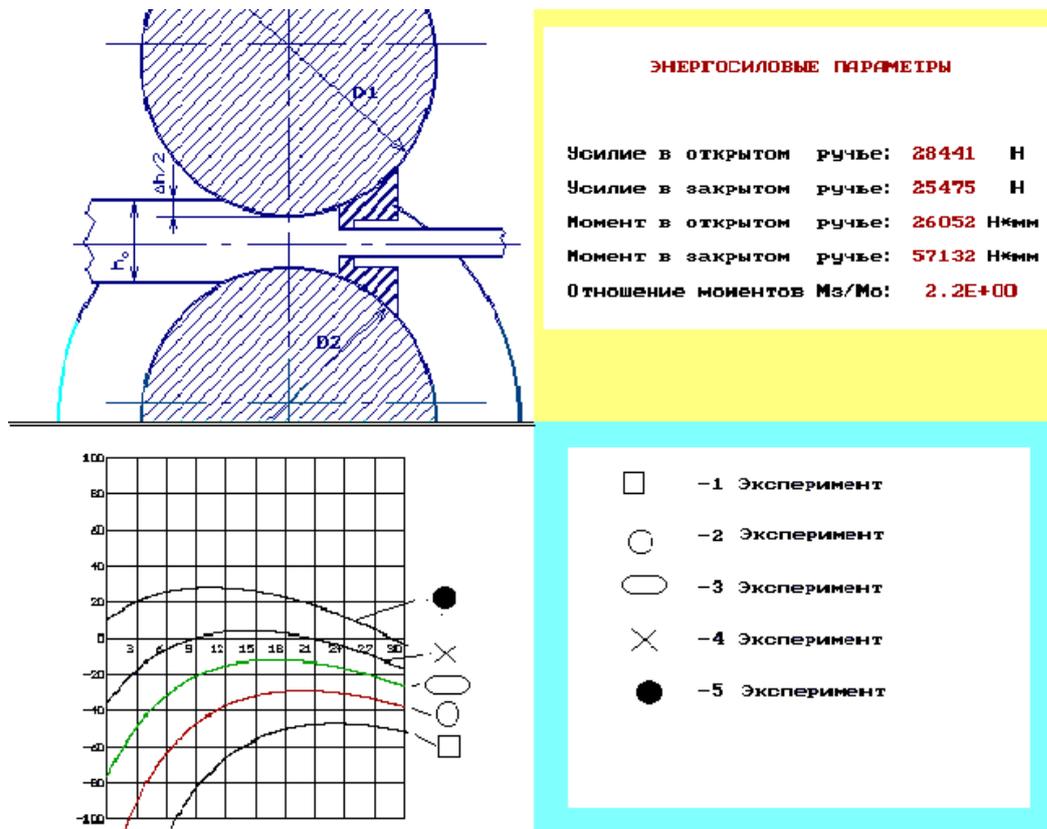


Рис. 6.7. Окно с данными расчета энергосиловых параметров процесса прокатки-прессования

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Волкова В.Н., Денисов А.А. Основы теории систем и системного анализа: Учебник для студентов вузов. Изд. 2-е, перераб. и доп. – СПб.: Изд-во СПбГТУ. – 2001. – 512 с.
2. Ризкин И.Х. Машинный анализ и проектирование технических систем. – М.: Наука, 1985. – 160 с.
3. Черников Ю.Г. Системный анализ и исследование операций: Учебное пособие для вузов. – М.: Издательство Московского государственного горного университета, 2006. – 370 с.
4. Дж. ван Гиг. Прикладная общая теория систем: Пер. с англ. В 2-х т. Т. 1. М.: Мир, 1981. □ – 336 с.
5. Довженко Н.Н., Сидельников С.Б., Васина Г.И. Система автоматизированного проектирования технологии прессования металлов. Научное методическое обеспечение. – Красноярск: ГАЦМиЗ, 2000. – 196 с.
6. Введение в анализ, синтез и моделирование систем. – <http://www.INTUIT.ru>.
7. Введение в математическое моделирование: Учебное пособие/ Под ред. П.В. Трусова. – М.: Логос, 2004. – 440 с.
8. Васильев Я.Д. Инженерные модели и алгоритмы расчета параметров холодной прокатки. – М.: Metallurgia, 1995. – 368 с.
9. Паршин В.С. Основы системного совершенствования процессов и станов холодного волочения. – Красноярск: изд-во КГУ, 1986. – 192 с.
10. Советов Б.Я., Яковлев С.А. Моделирование систем: Учебник для вузов. – М.: Высш. шк., 1985. – 271 с.
11. Сидельников С.Б., Довженко Н.Н., Загиров Н.Н. Комбинированные и совмещенные методы обработки цветных металлов и сплавов: монография. – М.: МАКС Пресс, 2005. – 366 с.
12. Самарский А.А. введение в численные методы. – М.: Наука, 1982. – 272 с.
13. Теория обработки металлов давлением/ И.Я. Тарновский, А.А. Поздеев, О.А. Ганаго и др. – М.: Metallurgizdat, 1963, – 672 с.
14. Довженко Н.Н. Повышение эффективности производства длинномерных изделий из цветных металлов и сплавов на основе совершенствования процессов прессования и волочения и методов их проектирования. Дисс. на соиск. уч. ст. докт. техн. наук. Москва, 2002. – 606 с.
15. Степанский Л.Г. Расчеты процессов обработки металлов давлением. – М.: Машиностроение, 1979. – 215 с.
16. Колмогоров В.Л. Механика обработки металлов давлением. Учебник для вузов. Изд. 2-е перераб. и доп. – Екатеринбург: УГТУ–УПИ, 2001. – 836 с.
17. Кучеряев Б.В. Механика сплошных сред (Теоретические основы обработки давлением композиционных металлов). Учебник для вузов. – М.: «МИСИС», 2000. – 320 с.
18. Мастеров В.А., Берковский В.С. Теория пластической деформации и об-

- работки металлов давлением. – М.: Металлургия, 1989. – 400 с.
19. Бусленко Н.П., Калашников В.В., Коваленко И.Н. Лекции по теории сложных систем. – М.: Советское радио, 1973. – 241 с.
20. Сторожев М. В., Попов Е. А. Теория обработки металлов давлением. Изд. 4-е, перераб. и доп. – М.: Машиностроение, 1977. – 423 с.
21. Полухин П.И., Горелик С.С., Воронцов В.К. Физические основы пластической деформации. – М.: Металлургия, 1982. – 584 с.
22. Богатов А.А., Мижирицкий О.И., Смирнов С.В. Ресурс пластичности при обработке давлением. – М.: Металлургия, 1984. – 144 с.
23. Довженко Н.Н. Прогнозирование и повышение точности размеров и однородности свойств профилей из алюминиевых сплавов при прямом прессовании через плоские матрицы: Автореф. дисс. канд. техн. наук. – Свердловск, УПИ, 1984. – 23 с.
24. Совершенствование технологии волочения медной никелированной проволоки/ В. Н. Трофимов, Г. Л. Колмогоров, И.С. Сапрыкина и др.// Цветные металлы. – 1991. – №1. – с. 51 – 52.
25. Штампы для горячего деформирования металлов/М.А. Тылкин, Д.И. Васильев, А.М. Рогалев и др.: Под ред. М.А. Тылкина. – М.: Высш. шк., 1977. – 496 с.
26. Готлиб Б.М., Добычин И.А., Баранчиков В.М. Основы статистической теории обработки металлов давлением. (Методы решения технологических задач). – М.: Металлургия, 1980. – 168 с.
27. Надежность технических систем. Изд. 2-е дополн. и перераб. Учебное пособие. – Красноярск: МГП РАСКО, 2001. – 608 с.
28. Хайкин Б.Е. Аппроксимация эмпирических зависимостей в условиях обработки металлов давлением. Учебное пособие. – Свердловск: УПИ, 1984. – 61 с.
29. Гун Г.Я. Математическое моделирование процессов обработки металлов давлением. Учебное пособие для вузов. – М.: Металлургия, 1983. – 352 с.
30. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 542 с.
31. Zienkiewicz, O. C. The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals / O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor. Woburn: Butterworth-Heinemann, 2005. – 752 p.
32. Zienkiewicz, O. C. The Finite Element Method for Solid and Structural Mechanics / O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor. Woburn: Butterworth-Heinemann, 2005. – 736 p.
33. <http://www.fea.ru>.
34. Лесин В.В., Лисовец Ю.П. Основы методов оптимизации. Учебное посо-

бие. – М.: изд-во МАИ, 1998. – 344 с.